Zielona Góra, 07. 06. 2024 r.

dr hab. Krzysztof Przesławski
ul. Łukowska 2B/27
04-113 Warszawa
k.przeslawski@im.uz.zgora.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Musielaka
On Reduced Spherical Bodies

Przedstawiona do oceny rozprawa składa się z pięciu powiązanych tematycznie prac. Trzy z nich powstały we współpracy z promotorem rozprawy, zaś dwie kandydat opublikował samodzielnie. Wszystkie poświęcone są wypukłym ciałom sferycznym, jednak jedynie w pracy II rozpatrzony jest przypadek ogólny, pozostałe dotyczą figur na sferze dwuwymiarowej. Punktem wyjścia rozprawy jest klasa ciał wypukłych zredukowanych wprowadzona przez E. Heila w 1978 roku. Przypomnijmy, że wypukłym ciałem zredukowanym nazywamy każde ciało wypukłe niezawierające podciała właściwego o takiej samej minimalnej szerokości (grubości). Na temat ciał tej klasy powstała całkiem obszerna literatura. Stan badań na rok 2010 został przedstawiony w pracy przeglądowej M. Lassaka i H. Martiniego. W rozprawie dyskutuje się odpowiednik tej klasy w przypadku sferycznym. Zainteresowanie ciałami zredukowanymi wynika, być może, z ich związków z szeroko badaną klasą zbiorów o stałej szerokości. W pracy z roku 1983, H. Groemer wykazał, że jeśli ciało zredukowane ma gładki brzeg, to musi też mieć stałą szerokość. Groemer wyraźnie jednak zaznaczył, że twierdzenie to było znane już Heilowi. Nic dziwnego, że tego rodzaju związek pojawia się także w rozprawie: obok sferycznych zbiorów zredukowanymch pojawiają się sferyczne zbiory o stałej szerokości. Przejdę teraz do nieco bardziej szczegółowego opisania zawartości rozprawy.

Praca I jest dość techniczna, poprzestanę więc na przytoczeniu kilku łatwiej wysławialnych rezultatów: Każde zredukowane ciało sferyczne grubości większej niż $\pi/2$ ma gładki brzeg. Ma także stałą szerokość. Jeśli grubość takiego ciała jest mniejsza niż $\pi/2$, to jego ścisła wypukłość pociąga stałą szerokość i na odwrót.

W pracy II znalazły się między innymi uogólnienia niektórych rezultatów z pierwszej pracy na dowolny wymiar; np.: każde ciało sferyczne na S^d o stałej szerokości większej niż $\pi/2$ jest gładkie, a mniejszej – ściśle wypukłe. Dla ciał o stałej szerokości wykazano, że średnica zbioru jest równa szerokości. (Oczywiście, odpowiedni rezultat był znany w przypadku euklidesowym). Wprowadzono także klasę zbiorów o stałej średnicy i zbadano jej powiązania z klasą zbiorów o stałej szerokości.

W pracy III autorzy wykazali, że średnica $\operatorname{diam}(R)$ zredukowanej sferycznej figury oraz jej grubość $\Delta(R)$ spełniają nierówność $\operatorname{diam}(R) \leqslant \arccos(\cos^2 \Delta(R))$, o ile $\Delta(R) < \pi/2$. Jeśli zaś $\Delta(R) \geqslant \pi/2$, to $\operatorname{diam}(R) = \Delta(R)$.

W czwartej z prac składających się na rozprawę kandydat dowodzi twierdzeń o pokryciach figur sferycznych za pomocą dysków. Pokrywane są figury o stałej szerokości $w \geqslant \pi/2$ bądź figury zredukowane o grubości $\Delta < \pi/2$. Promienie dysków są wyrażone w postaci funkcji zależnych od w i od Δ, odpowiednio.

Wreszcie w piątej pracy kandydat dowodzi twierdzenia o pokryciu dla wielokątów sferycznych: każdy zredukowany wielokąt sferyczny zawiera się w dysku o promieniu równym grubości tego wielokąta i środku będącym punktem brzegowym wielokąta. Twierdzenie to jest wiernym przeniesieniem na przypadek sferyczny twierdzenia udowodnionego wcześniej przez E. Fabińską dla figur płaskich. Nawiasem mówiąc, twierdzenie Fabińskiej stawiał w formie hipotezy M. Lassak.

Wykorzystywane w pracach techniki są elementarne i należą głównie do arsenału geometrii syntetycznej. Jednak nie oznacza to, że prace są łatwe, wręcz odwrotnie, niektóre z przedstawionych rozumowań są dość skomplikowane. Tematyka prac wyraźnie pokrywa się z zainteresowaniami promotora, który w tym obszarze geometrii jest uznanym specjalistą i bardzo produktywnym autorem. Utrudnia to ocenę wkładu kandydata, tym bardziej, że zarówno kandydat jak i promotor bardzo wstrzemięźliwie opisali swój udział we wspólnych publikacjach, określając go jedynie procentowo.

Co się tyczy poprawności rozumowań, w pracy V, w dowodzie lematu 1 znalazłem błąd. Błąd jest naprawialny, jednak napisałem do pana Musielaka, by zechciał przysłać mi poprawny dowód. Pan Musielak moją prośbę spełnił i przysłał zadowalające rozumowanie.

W przygotowanym przez kandydata opracowaniu znalazłem drobne literówki; na stronie 10 w szóstym akapicie od góry powinno być: $X = H(x), Y = H(y), Z = H(z)$; preprint Heila ukazał się w roku 1978, a nie, jak jest napisane na stronie 20, w roku 1987. Nie mają one jednak większego znaczenia. Przedstawione opracowanie jest, w mojej opinii, zadowalające.

Mimo moich wątpliwości dotyczących wkładu kandydata w prace wspólne, oceniam jego rozprawę pozytywnie i wnoszę o dopuszczenie do kolejnych etapów postępowania.