Streszczenie

Na początku przywołane zostaną elementy teorii przestrzeni Hilberta z jądrem reprodukującym. Zostanie pokazane, że istnienie jądra reprodukującego jest równoważne ciągłości funkcjonałów ewaluacji. Dany będzie dowód, że jeśli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta z jądrem reprodukującym funkcji określonych na U, wówczas w dowolnym zbiorze

$$\{f \in \mathcal{H} \mid f(z) = 1\}, z \in U$$

o ile jest niepusty, znajduje się dokładnie jeden element o minimalnej normie.

Drugi rozdział poświęcony zostanie przestrzeniom Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem, które są jądrem (w sensie algebraicznym) pewnego operatora eliptycznego. Będzie pokazane, że taka przestrzeń jest przestrzenią Hilberta z jądrem reprodukującym. Potem pokażemy, że jądro reprodukujące takiej przestrzeni zależy w sposób ciągły od wagi całkowania, tzn. od deformacji iloczynu skalarnego. Zbieżność wag zaledwie prawie wszędzie będzie potrzebna. Następnie uogólnimy twierdzenie Ramadanowa, tzn. pokażemy, że jądro reprodukujące takiej przestrzeni zależy w sposób ciągły od obszaru całkowania, tzn. od dziedziny, na której określone są nasze funkcje. Zostanie to zrobione na trzy sposoby dla przypadku rosnącego ciągu obszarów. Ponadto zostanie podany warunek wystarczający dla przypadku malejącego ciągu obszarów.

Szczególnym przypadkiem takiej przestrzeni jest przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem i harmonicznych. Dla tego przypadku będzie pokazane, że jeśli tylko waga całkowania jest całkowalna w jakiejś dodatniej potędze, wówczas jądro reprodukujące

odpowiadającej ważonej przestrzeni Hilberta istnieje. Co więcej podany będzie przykład wagi, dla której nie istnieje jądro reprodukujące takiej przestrzeni.

Korzystając z własności minimalnej normy jądra reprodukującego przywołanej w rozdziale drugim, stwierdzimy, że w zbiorze całkowalnych z kwadratem rozwiązań równania eliptycznego, które w pewnym zadanym punkcie przyjmują wartość c, o ile jest niepusty, znajduje się dokładnie jeden element o minimalnej normie. Co więcej, ten element zależy w sposób ciągły od wagi i od obszaru całkowania w ściśle określonym sensie.

Trzeci rozdział poświęcony zostanie ważonym jądrom typu Szegö. Damy warunki wystarczające na wagę całkowania, aby istniało jądro reprodukujące odpowiadającej ważonej przestrzeni. W szczególności będzie pokazane, że jeśli odwrotność wagi całkowania jest całkowalna, to istnieje jądro reprodukujące odpowiadającej ważonej przestrzeni Szegö. Przypadek obszarów o niespójnych brzegach również będzie rozważony. Co więcej, damy przykład wagi dla kuli jednostkowej, dla której nie istnieje jądro reprodukujące odpowiadającej przestrzeni. Używając biholomorfizmów, pokażemy, że takie wagi istnieją dla szerokich klas obszarów.

Później będzie udowodnione, że jądro Szegö zależy w sposób ciągły od wagi całkowania. Twierdzenie Pasternaka o zależności rzutu ortogonalnego od deformacji iloczynu skalarnego zostanie użyte w dowodzie. Na koniec zostanie pokazane, jak ważone jądro Szegö może być użyte do udowodnienia ogólnych twierdzeń analizy zespolonej.

Słowa kluczowe: Przestrzeń Hilberta z jądrem reprodukującym, funkcjonał ewaluacji, jądro reprodukujące, operator eliptyczny, równanie eliptyczne, minimalne rozwiązanie, jądro Szegö, wagi dopuszczalne, wagi całkowania, zależność od parametrów, ciągła zależność, twierdzenie Ramadanowa, ciągła zależność od wagi całkowania.