

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Fizyki

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Kinga Maria Wójcicka

Reprezentacja pomiarów w zbiorach
rozmytych

Promotor

dr hab. Michał Urbański, prof. PW

Warszawa 2024

Streszczenie

Celem pracy jest opracowanie podstaw matematycznych zastosowania zbiorów rozmytych do analizy niepewności. Probabilistyczna teoria pomiaru ma 200 lat rozwoju a zbiory rozmyte mają niewiele ponad pół wieku. Ta praca wnosi wkład w teorię pomiaru w modelu zbiorów rozmytych i uzupełnia brakujące dowody matematyczne. Jest to pewnego rodzaju uzupełnienie rozważań podjętych przez pana Profesora Michała Urbańskiego w jego habilitacji ([42]). Pomiar opisuje się jako operację, która mierzalnym obiektom przyporządkowuje liczby, charakteryzujące te obiekty. Innymi słowy, pomiar jest traktowany jako odwzorowanie (tzw. odwzorowanie pomiarowe) ze struktury empirycznej w strukturę matematyczną reprezentującą mierzone wartości. Własności struktury ogólnie zależą od typu pomiaru, ale w naszym przypadku struktura empiryczna zadana jest przez dwie operacje: składania obiektów i porównania ich wielkości przy użyciu komparatora. Porządek w przestrzeni obiektów zadany jest przez porównywanie obiektów. Porównanie jest możliwe dzięki użyciu jakiegoś komparatora (np. wagi szalkowej). Celem tej pracy jest zbadanie i opisanie wybranych własności porządku wprowadzonego przez pana Profesora Urbańskiego ([42]) na poziomie struktury rozmytej (a nie liczbowej) reprezentującej strukturę empiryczną przy użyciu homomorfizmu, który polega na porównaniu dwóch obiektów przy użyciu tzw. α -przekrojów. Wyniki poszczególnych rozdziałów zostały opublikowane w pracach ([5, 47, 48, 49, 50, 51]).

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, teoria pomiaru, teoria reprezentacji, zbiory rozmyte, porządki rozmyte.

Abstract

The aim of this work is to develop the mathematical basis for the application of fuzzy sets to the analysis of uncertainty. Probabilistic measurement theory is 200 years old and fuzzy sets are less than half a century old. This work contributes to the theory of measurement in the fuzzy sets model and complements the missing mathematical evidence. It is a kind of complement to the considerations made by Professor Michał Urbański in his habilitation ([42]). Measurement is described as an operation that assigns to measurable objects the numbers that characterize those objects. In other words, measurement is treated as a mapping (so-called measurement response) from an empiric structure to a mathematical structure representing the measured values. The properties of the structure generally depend on the type of measurement, but in our case, the empirical structure is given by two operations: assembling objects and comparing their size using a comparator. The order in the space of objects is given by comparing objects. The comparison is made possible by using a comparator (e.g. a scale weight). The aim of this work is to investigate and describe selected properties of the order introduced by Professor Urbański ([42]) at the level of fuzzy (rather than numerical) structure representing empirical structure using homomorphism, which involves comparing two objects using so-called *alpha*-transversions. The results of the individual chapters have been published in papers ([5, 47, 48, 49, 50, 51]).

Keywords: measurement uncertainty, measurement theory, representation theory, fuzzy sets, fuzzy orders.

Podziękowania

W tym miejscu chciałabym bardzo podziękować na początku i przede wszystkim mojemu Promotorowi, panu Profesorowi Michałowi Urbańskiemu, za cały trud, ogrom czasu i cierpliwości, jakie mi poświęcił. Chciałam także podziękować mojemu mężowi Pawłowi Wójcickiemu, za jego cierpliwość, ogromne wsparcie jakiego mi udzielił, a także pomoc w domowych obowiązkach na korzyść mojej nauki. Chciałabym podziękować mojej Mamie, która od dzieciństwa była dla mnie największym wsparciem, za jej pomoc i opiekę nad dziećmi. Dziękuję na koniec mamie męża, za wsparcie na miarę jej możliwości, jakiego nam udzieliła.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I DEFINICJI

OZNACZENIA

V	zbiór empirycznych obiektów obserwowalnych i mierzalnych
$\mathbb{V}$	struktura obiektów empirycznych: $\mathbb{V} = \langle V, r_1, r_2, \dots \rangle$, gdzie r_i – relacje w V
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{Q}^+$	zbiór dodatnich liczb wymiernych
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\bar{A}$	zbiór rozmyty
$[\bar{A}]^\alpha$	α -przekrój zbioru rozmytego (w skrócie przekrój zbioru rozmytego)
supp	support, nośnik zbioru rozmytego
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}^+$	liczby rzeczywiste dodatnie
$\{x : \Phi(x)\}$	zbiór takich x , które spełniają warunek $\Phi(x)$
$\bar{a}$	przedział
$[a, b]$	przedział domknięty o początku w a i końcu w b
Med	mediana zbioru ciągu liczb $(x_1, \dots, x_N)$
$Me(X)$	mediana zmiennej losowej X
$\text{Mid}(\bar{a})$	środek przedziału $\bar{a}$, $\text{Mid}([a, b]) = \frac{b+a}{2}$
$\text{Rad}(\bar{a})$	promień przedziału $\bar{a}$, $\text{Rad}([a, b]) = \frac{b-a}{2}$
$\text{Ker}(\bar{A})$	rdzeń zbioru rozmytego $\bar{A}$
$\text{Ker}(\bar{A})$	rdzeń zbioru rozmytego $\bar{A}$
X	zmienna losowa
Ω	zbiór zdarzeń elementarnych, zbiór wzorców pomiarowych, stanów wzorcowych, względem których wykonuje się pomiary. W teorii zbiorów rozmytych jest to zbiór, na którym określona jest funkcja przynależności.
$U(a)$	niepewność wyniku pomiaru na obiekcie a
$U_p(X)$	niepewność rozszerzona pomiaru zjawiska reprezentowanego przez zmienną losową X dla poziomu ufności p

$E(X)$	wartość oczekiwana zmiennej losowej X
$\sigma(X)$	odchylenie standardowe: $\sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$
$\text{Cov}(X, Y)$	kowariancja zmiennych losowych
δX	błąd, zmienna losowa lub rozmyta
ΔX	błąd maksymalny danego pomiaru

DEFINICJE

Mediana ciągu liczb

$$\text{Med}(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste} \\ \frac{1}{2} \left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1} \right), & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste} \end{cases}.$$

gdzie $(x_1, \dots, x_N)$ jest ciągiem uporządkowanym liczb.

Mediana zmiennej losowej

$Me(X) = F_X^{-1}(\frac{1}{2})$, gdzie F_X -dystrybuanta zmiennej losowej X

Mesurand-odwzorowanie $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$, które obiektom przyporządkowuje liczbę, którą nazywamy wartością wielkości mierzonej.

Próg – $\delta(a, b)$, próg odróżnialności obiektów: $a \prec b \Leftrightarrow \Phi(a) + \delta(a, b) < \Phi(b)$ dla $a, b \in V$.

Powielanie – operacja uzyskania obiektu, który jest n -krotnością obiektu powielanego. n -krotność obiektu a oznaczamy $n.a$.

Relacja dwuargumentowa R w zbiorze V – podzbiór produktu kartezjańskiego: $R \subset V \times V$. Jeśli nie podaje się liczby argumentów to zakłada się, że jest dwuargumentowa. Relacje są tego samego typu jeśli mają tyle samo argumentów [6].

Relacja poprzedzania $\prec$ – relacja zadana na zbiorze obiektów poprzez operację komparacji.

Struktura algebraiczna – zbiór ze zdefiniowanymi działaniami i relacjami, przykładem jest $\langle V, \prec, \oplus \rangle$, gdzie, V zbiór, $\prec$ – relacja poprzedzania (np. porządek)

$\oplus$ – operacja składania obiektów (np. dodawanie), np. [34, 8]

Homomorfizm – odwzorowanie, które zachowuje strukturę [8, 6]

Izomorfizm – homomorfizm, który jest wzajemnie jednoznaczny

Kowariancja zmiennych losowych X i Y jest dana wzorem:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Spis treści

Wstęp	xiii
Rozdział 1: Wprowadzenie	1
1.1 Historyczne źródła teorii pomiaru, błędu i niepewności.	1
1.2 Rola teorii reprezentacji	4
1.3 Niepewność, błąd pomiarowy, próg	5
1.4 Zbiory rozmyte i ich własności. T-normy.	11
1.5 Porządki na zbiorach rozmytych.	15
Rozdział 2: Pomiar i skale pomiarowe	19
2.1 Pomiar w teorii reprezentacji	19
2.2 Skale pomiarowe	22
Rozdział 3: Niepewność w modelu probabilistycznym i zbiorów rozmytych	25
3.1 Zmienna losowa	25
3.2 Zmienna rozmyta	29
3.3 Niepewność	30
3.3.1 Podstawowe założenia teorii niepewności	30
3.3.2 Błąd pomiaru i modele błędów	31
3.3.3 Niepewność jako parametr rozkładu błędu	31
3.3.4 Addytywność błędu i składanie niepewności	32
3.3.5 Składanie niepewności rozszerzonej dla dwóch członów	33
3.3.6 Składanie niepewności rozmytej	33
3.4 Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość	34
3.4.1 Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość: warunek zgodności.	37
3.4.2 Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość jako homomorfizm struktur.	40

3.5	Wyznaczanie funkcji przynależności na podstawie danych pomiarowych (na podstawie [42])	42
3.6	Analiza niepewności metodą zbiorów rozmytych na przykładzie pomiaru zmiennego pola magnetycznego [52]	45
3.6.1	Algorytm wyznaczania niepewności	45
3.6.2	Propagacja niepewności	46
3.6.3	Układ pomiarowy	46
3.6.4	Pole wzorcowe	47
3.6.5	Błędy współczynnika β definiującego wzorzec pola.	47
3.6.6	Błędy współczynnika β	48
3.6.7	Wzmacniacz sygnału cewki	48
3.6.8	Wyznaczanie współczynnika proporcjonalności α	49
3.6.9	Skalowanie przyrządu	49
3.6.10	Źródło pola	49
3.6.11	Funkcja przynależności napięcia wyjściowego	50
3.6.12	Błąd pomiaru pola	50
3.6.13	Obliczenia niepewności rozmytej	51
3.6.14	Obliczenia niepewności rozmytej–błąd nachylenia a	52
3.6.15	Niepewność pomiaru napięcia wyjściowego	52
3.6.16	Wynik końcowy pomiaru wektora indukcji magnetycznej	53
3.7	Wnioski	53
Rozdział 4: α -przekroje sumy zbiorów rozmytych typu $L - R$		55
4.1	Notacja i niezbędne definicje	56
4.2	Rozkład zbioru rozmytego na składowe	56
4.3	Wyniki pomocniczne	58
4.3.1	Położenie punktów ekstremalnych	61
4.4	Twierdzenie główne	64
Rozdział 5: O pewnym porządku na zbiorach rozmytych indukowanym przez arytmetykę opartą na t -normie.		71
5.1	Własności porządku rozmytego opartego $\prec_\alpha$	72
5.2	Wnioski	79

Rozdział 6: Wnioski z pracy i dalsze badania	81
6.0.1 Podsumowanie i najważniejsze tezy	81
Bibliografia	83

Wstęp

Celem tej rozprawy jest opis modelu matematycznego pomiarów nieidealnych (z błędem pomiarowym) wielkości ekstensywnych (addytywnych) mierzonych bezpośrednio, przez porównanie ze wzorcem. Jest to pewnego rodzaju uzupełnienie rozważań podjętych przez pana Michała Urbańskiego w jego habilitacji ([42]). Pomiar opisuje się jako operację, która mierzalnym obiektom przyporządkowuje liczby, charakteryzujące te obiekty. Innymi słowy, pomiar jest traktowany jako odwzorowanie (tzw. odwzorowanie pomiarowe) ze struktury empirycznej w strukturę matematyczną reprezentującą mierzone wartości. Własności struktury ogólnie zależą od typu pomiaru, ale w naszym przypadku struktura empiryczna zadana jest przez dwie operacje: składania obiektów i porównania ich wielkości przy użyciu komparatora. Porządek w przestrzeni obiektów zadany jest przez porównywanie obiektów. Porównanie jest możliwe dzięki użyciu jakiegoś komparatora (np. wagi szalkowej). Celem tej pracy jest zbadanie i opisanie wybranych własności porządku wprowadzonego przez pana Profesora Urbańskiego ([42]) na poziomie struktury rozmytej (a nie liczbowej) reprezentującej strukturę empiryczną przy użyciu homomorfizmu, który polega na porównaniu dwóch obiektów przy użyciu tzw. α -przekrojów. Wyniki poszczególnych rozdziałów zostały opublikowane w pracach ([5, 47, 48, 49, 50, 51, 5]).

Rozdział pierwszy zawiera krótki historyczny zarys rozważanego problemu teorii błędu, niepewności i pojęcia pomiaru. Rozdział drugi dotyczy pojęcia pomiaru w teorii reprezentacji, a także skal pomiarowych. Rozdział trzeci opisuje niepewność w ujęci klasycznego prawdopodobieństwa, a także teorii zbiorów rozmytych. W nim opisujemy głębiej transformację prawdopodobieństwo–możliwość (possibility-probability) wprowadzoną przez prof. Michała Urbańskiego ([42]). Także w tym rozdziale, jako przykład teorii, analizujemy niepewność metodą zbiorów rozmytych na przykładzie pomiaru zmiennego pola magnetycznego. Rozdział czwarty jest poświęcony zbiorom rozmytym typu L-R. Właśnie takie zbiory służą do opisu niesystematycznych błędów pomiarowych. Ten rozdział zawiera twierdze-

nie, które efektywnie pozwala na znalezienie α –przekroju dla min. różnicy/sumy dwóch zbiorów rozmytych typu L-R. Jest to ważne z punktu widzenia rozważanego w pracy w rozdziale 5 porządku, pozwalającego na porównywanie zbiorów rozmytych na poziomie struktury rozmytej, która reprezentuje przez homomorfizm strukturę modelowaną (empiryczną), dla której robimy pomiary. Rozdział piątku zawiera ścisłą definicję i ważne z punktu widzenia metrologicznego własności tego porządku. Rozdział szósty, zawiera wnioski z pracy i naświetla dalsze kierunki badań w tej teorii, która wciąż jest rozbudowywana i nowa.

Warszawa, grudzień 2024

Kinga Maria Wójcicka

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Historyczne źródła teorii pomiaru, błędu i niepewności.

Od zawsze ludzkość była zmuszona do wykonywania pomiarów w różnoraki sposób. Bez pomiarów nie sposób było handlować, ściągać podatków, dzielić, podróżować, wyznaczać szlaków handlowych, żeglować, mierzyć upływu czasu itd. Stopniowo coraz bardziej uświadamiano sobie, że za każdym razem przy dokonywaniu pomiaru jest się narażonym na popełnienie błędu, z różnych losowych przyczyn. Kluczowy rozwój tej myśli miał miejsce w XVIII i XIX wieku. Jak pisze m.in. pan dr inż. Paweł Fotowicz ([12]) kluczowymi publikacjami w tej tematyce były prace trzech matematyków. To właśnie Adrien Marie Legendre (1752-1833), Carl Freidrich Gauss (1777-1855) oraz Pierre Simon Laplace (1749-1827) w swoich pracach dali podstawy współczesnej metodyki opracowania danych pomiarowych. To właśnie oni stworzyli podstawy dla tak ważnych metod metrologii jak: metoda najmniejszych kwadratów (Legendre, „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes”(1805)), prawo propagacji błędu oraz centralne twierdzenie graniczne (Gauss, „Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium”(1809), Laplace, „Supplement au memoire”(1810)).

Gauss jako aksjomat przyjmował założenie, że najbardziej prawdopodobną wartością pojedynczej, nieznaney obserwacji jest średnia arytmetyczna zbioru rozważanych danych, które zostały otrzymane w tych samych warunkach pomiarowych podczas wielokrotnego powtarzania obserwacji. Zaproponował on, aby do opisu rozkładu błędu użyć funkcji

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

gdzie h jest pewną stałą związaną z pomiarem.

Pierre Laplace sformułował trzy warunki dotyczące krzywej rozkładu błędu:

1. Krzywa rozkładu błędu musi być symetryczna względem wartości prawdziwej (obserwacje mogą ochylać się tak samo w kierunku większych wartości, jak i mniejszych).
2. Krzywa rozkładu błędu rozpląszcza się do osi $y = 0$ przy oddalaniu się od wartości prawdziwej.
3. Pole powierzchni pod krzywą rozkładu powinno być 1 ponieważ z pewnością każda obserwacja zawarta jest pod tą krzywą.

Już w XVIII wieku uświadamiano sobie, że pomiary są obarczone błędami. Losowość odczytu pomiaru, a także jego dokonania (warunki w danych okolicznościach, itd.) wpływają na dokładność pomiaru. Zatem zawsze jest jakaś nieznaną różnica pomiędzy dokładną wartością dokonanego pomiaru a wartością obserwacji. Pojęcia niepewności pomiaru użył po raz pierwszy prawdopodobnie Sir George Biddell Airy w dziele „On the Algebraic and Numerical Theory of Errors of Observations and the Combination of Observations” w roku 1861, jednakże już w 1757 Thomas Simpson w dziele „Miscellaneous Tracts on Some Curious Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics” rozważał kwestię rozkładu dla błędu pomiaru. Postulował on rozkład trójkątny dla krzywej rozkładu błędu.

Przez wiele lat w modelu probabilistycznym opisu pomiaru używany był termin „błąd”, natomiast termin „niepewność” wszedł na stałe do metrologii stosunkowo niedawno (datę tę wiąże się z publikacją w roku 1993 Przewodnika ([18])). Pojęcie „błąd” oznacza różnicę pomiędzy wartością zmierzoną a wartością prawdziwą (której nie znamy). Pojęcie „niepewność” wiąże się z szacowaniem parametru rozkładu błędu.

W ujęciu probabilistycznym pomiar opisany jest przy pomocy tzw. zmiennej losowej, którą można zapisać jako sumę liczby charakteryzującej właściwości mierzonego obiektu oraz błędu, który jest zmienną losową opisującą zakłócenia pomiarowe. Miara tych zakłóceń (rozrzutu pomiarów) jest promień przedziału ufności estymatora wartości mierzonej lub odchylenie standardowe.

Wynikiem pomiaru są liczby które powinny opisywać badane obiekty. W naukach przyrodniczych pomiar polega na porównaniu ze wzorcem i nie zachodzi potrzeba dowo-

dzenia, że opis liczbowy reprezentuje rzeczywistość. Pomiar jest tak stary jak koncepcja liczb i początki metrologii sięgają czasów tworzenia się pierwszych państw. W filozofii czasów Arystotelesa zakładano, że rzeczywistość jest liczbową i pomiar jest tylko „odsłanianiem” tych liczb ukrytych w rzeczywistości. W XIX wieku nastąpiły dwie istotne zmiany w filozofii pomiaru i matematyce liczb: zdano sobie sprawę że liczby nie są tożsame z rzeczywistością ale ją tylko reprezentują oraz podano po raz pierwszy definicję liczb rzeczywistych (Cauchy, Dedekind itd). Definicja ta zauważyła, że liczby rzeczywiste są strukturą algebraiczną i że liczby wymierne są gęste w $\mathbb{R}$. Matematycy zauważyli potrzebę pokazania warunków przy których struktura algebraiczna liczb rzeczywistych opisuje poprawnie obiekty rzeczywistości. Trzeba było określić pomiar w języku struktury algebraicznej: pomiar jest możliwy dzięki składaniu obiektów i określeniu porządku narzędziami pomiarowymi. Podstawowym narzędziem stał się komparator.

Fizycy nie byli zainteresowani algebraizacją teorii pomiaru, rozwinęła się jedynie kwantowa teoria pomiaru. Kwantowa teoria pomiaru nie znalazła połączenia z teorią reprezentacji. Natomiast pomiar w naukach społecznych pokazał konieczność badania adekwatności skal pomiarowych do badania zjawisk społecznych. W wielu przypadkach pomiarów społecznych nie ma w zbiorze obiektów operacji składania, wobec tego można stosować jedynie skale porządkowe (podrozdział 2.2).

W ujęciu teorii reprezentacji pomiar po raz pierwszy został opisany przez Höldera w pracy „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass” ([19]). Rozwazał on reprezentacje pomiarów idealnych (nie zawierających błędów pomiarowych). Hölder ustalił warunki, przy których zbiór z pewnym ustalonym (matematycznym) porządkiem (relacją) i składaniem obiektów jest homomorficzny ze zbiorem liczb rzeczywistych z ustalonym porządkiem i dodawaniem (liczb).

W późniejszym czasie (do około połowy XX w.) po pracy Höldera zajmowano się wyłącznie pomiarami idealnymi. Jedną z pierwszych prac w kierunku rozwoju teorii reprezentacji pomiarów z błędami była praca D. Scotta oraz P. Suppesa „Foundational Aspects of theories of measurement”, z roku 1958 ([36]). Użyto reprezentacji przedziałowej (reprezentacji z porządkiem przedziałowym), w której właściwości badanych obiektów opisane są przedziałami z arytmetyką przedziałową oraz z porządkiem przedziałowym. Odpowiada to modelowi błędów systematycznych.

Bardzo ważną pracą w rozwoju teorii reprezentacji błędów systematycznych była także

praca M. Menestrela oraz B.Lemairea „Biased extensive measurement: The general case”, z roku 2006 ([27]). Założyli oni że do wykonania pomiaru potrzebne są dwie operacje: powielanie oraz komparacja. Założono, że komparacja obiektów indukuje empiryczny porządek homotetyczny oraz że składanie obiektów dotyczy jedynie obiektów identycznych (powielanie).

Koncepcja opisu błędów niesystematycznych pojawiła się np. w pracy Maurisa, Lasserrea oraz Foulloya, „A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement”, z roku 2001 ([26]). Użyli oni koncepcji zbiorów rozmytych wraz z arytmetyką opartą o zasadę rozszerzeń Zadeha, w celu wyznaczenia niepewności jako α -przekroju zbioru rozmytego reprezentującego właściwości obiektu, który mierzymy. Niestety wadą w rozważanym modelu w ich pracy jest fakt, że propagacja niepewności jest taka sama jak propagacja błędów systematycznych opisanych arytmetyką przedziałową. W roku 2003 ukazała się praca Urbańskiego i Wąsowskiego pt. „Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness” ([44]) w której po raz pierwszy zaproponowano spójne reprezentowanie wyników pomiarów w zbiorach rozmytych z błędami systematycznymi i niesystematycznymi przy użyciu arytmetyk opartych na t -normach (także [43]).

Pomiar w praktyce społecznej, w handlu i zarządzania podatkami miał fundamentalną rolę od początków państwowości [23].

1.2 Rola teorii reprezentacji

Pojęcie pomiaru było przedmiotem wielu sporów ([39]) spowodowanych różnymi intuicjami na ten temat ludzi, którzy się tym problemem zajmowali. Nowoczesne pojęcie pomiaru było użyte np. w pracy N. R. Campbell ([39]). Pomiarom nazywamy przyporządkowanie badanemu obiektowi liczby rzeczywistej według ustalonych reguł. Takie przyporządkowanie nazywamy odwzorowaniem pomiarowym (zajmujemy się tym w dalszych rozdziałach pracy). Teoria reprezentacji pomiaru ma na celu opisać w sposób matematyczny właściwości takiego odwzorowania pomiarowego. Formalnie rzecz biorąc, ma ona dostarczyć algebraiczny opis pomiaru jako homomorfizmu struktur. Taka teoria pomiaru nazywana jest teorią reprezentacji. Jej zadaniem jest odpowiedzieć na pytanie, czy informacja uzyskana w wyniku pomiaru poprawnie reprezentuje mierzone obiekty empiryczne. Na początku XX w. teoria reprezentacji skupiona była wokół pomiarów idealnych, nato-

miast dopiero w latach 50-tych XX w. zaczęto rozwijać teorię reprezentacji uwzględniającą błędy systematyczne. Teorię, która uwzględnia zarówno błędy systematyczne, jak i niesystematyczne (przypadkowe) wprowadzili Urbański i Wąsowski w pracy [46].

1.3 Niepewność, błąd pomiarowy, próg

Początek współczesnej teorii błędów wiąże się z rozwojem probabilistyki i statystyki matematycznej. Jak wspomnieliśmy powyżej, pojęcia niepewności w znaczeniu współczesnym użył prawdopodobnie po raz pierwszy Sir George Biddell Airy w traktacie z roku 1861. Pojęcie błędu natomiast istniało już od Starożytności i było rozumiane ogólnie jako źle zrobiony pomiar. Termin „błąd” oznacza różnicę pomiędzy wartością zmierzoną a wartością „prawdziwą”. Ponieważ wartości prawdziwej nie znamy, więc błędu także nie znamy i możemy jedynie szacować „niepewność” jako miary błędu.

Zgodnie z zaleceniami „Przewodnika po wyrażaniu niepewności w pomiarach” (w skrócie GUM [18]) metody szacowania niepewności można podzielić na dwie grupy w zależności od źródła informacji: A – serie powtarzalnych pomiarów traktowane jako próba losowa o określonym rozkładzie, B – inne źródła informacji stanowiące podstawę analizy eksperckiej. Realizacja tych zaleceń jest możliwa zarówno w modelach probabilistycznych, jak i modelach zbiorów rozmytych.

Metoda szacowania niepewności A zakłada, że mierzona wielkość jest zmienną losową, której rozkład i parametry można oszacować na podstawie danych pomiarowych potraktowanych jako próbka zmiennej losowej reprezentującej proces pomiarowy. Metody statystyczne dostarczają estymatorów rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej oraz estymatorów parametrów rozkładu, takich jak wartość oczekiwana, mediana, odchylenie standardowe czy przedział ufności tych estymatorów. W celu skonstruowania modelu niepewności zbioru rozmytego proponuje się wykorzystanie przekształcenia z rozkładu prawdopodobieństwa na rozkład zmiennej rozmytej tak, aby przekroje α estymatorów zbiorów rozmytych pokrywały się z przedziałami ufności. Taka propozycja była przedstawiona w [41] oraz w pracach [42, 49].

Metoda B polega na wyznaczeniu, na podstawie wiedzy eksperckiej o systemie pomiarowym, rozkładu prawdopodobieństwa a priori błędów. Wyznaczony w ten sposób rozkład prawdopodobieństwa opisuje proces decyzyjny wyboru tego rozkładu a priori, ale

nie odzwierciedla losowych procesów zachodzących w systemie pomiarowym. Wybór przez metrologa rozkładu prawdopodobieństwa w celu opisanie błędów B nie jest równoznaczny z uzyskaniem rozkładu empirycznego z serii danych. Wybór rozkładu jest poglądem, a nie doświadczeniem empirycznym, a do matematycznego opisu poglądów stworzono zbiory rozmyte. Zbiory rozmyte zaproponowano właśnie w celu zbudowania modelu matematycznego opisującego procesy agregacji różnych niedokładnych danych empirycznych, a funkcja rozkładu zmiennych rozmytych opisuje raczej procesy analizy eksperckiej niż rozkład błędów. Dlatego matematyka zbiorów rozmytych dysponuje narzędziami odpowiednimi do opisu błędów typu B.

Naszym zdaniem stosowanie teorii prawdopodobieństwa opartej na mierze addytywnej do błędów typu B jest nieuzasadnione, ponieważ proces decyzyjny nie jest procesem losowym, lecz wyborem lepszego rozwiązania opisanego miarą maksytywną (nie addytywną). Maksytywność miary oznacza, że wybrane zostanie to zdarzenie, które jest najbardziej prawdopodobne. Miara maksytywna opisuje proces wyboru najlepszego, a tak zazwyczaj działają eksperci ([37]).

Metoda A opiera się na założeniu, że dane pomiarowe można traktować jako losową próbkę procesu stochastycznego reprezentującą losowe zjawiska w badanym obiekcie i przyrządach pomiarowych.

Połączenie obu metod jest możliwe w zbiorach rozmytych, jeśli przyjmiemy transformację rozkładu prawdopodobieństwa do rozkładu możliwości, która przekształca niepewność rozszerzoną na promień odpowiedniego α -przekroju zbioru rozmytego reprezentującego wyniki pomiarów.

W Guide podkreśla się, że klasyfikacja metod estymacji niepewności na A i B różni się od klasyfikacji błędów na systematyczne i przypadkowe założeniami wstępnymi klasyfikacji, czyli punktem wyjścia:

- w klasyfikacji na błędy systematyczne i przypadkowe podstawą jest natura mierzonej wielkości: błędy przypadkowe pochodzą od procesów które można opisać jako proces stochastyczny bazując na fizyce statystycznej a błędy systematyczne są nieznanymi odchyleniami wyniku pomiaru od wartości prawdziwej.
- klasyfikacja na metodę A i B polega na podziale metod wnioskowania z danych pomiarowych, a nie na analizowaniu natury fizycznej zjawisk odpowiedzialnych za

obserwowane fluktuacje. Zbiory rozmyte zostały zaproponowane właśnie w celu budowy matematycznego modelu opisującego procesy agregacji różnych empirycznych danych niedokładnych a funkcja rozkładu zmiennej rozmytej opisuje procesy analizy eksperckiej a nie rozkład błędu.

W niniejszej pracy zakładamy, że model probabilistyczny różni się od modelu rozmytego właściwością miary opisującej błędy pomiaru: w modelu probabilistycznym miara rozkładu prawdopodobieństwa opisująca obserwowane rozrzuty danych jest miarą addytywną, natomiast w modelu rozmytym możliwość wystąpienia tych danych jest opisana miarą maksymalną.

Zmienna losowa lub zmienna rozmyta opisująca pomiar może być zapisana jako suma:

$$X = x_0 + \Delta X \tag{1.1}$$

Równanie to oznacza, że istnieje pewna liczba x_0 charakteryzująca pomiar idealny ale z powodu błędów pomiarowych, które zawsze się przejawiają wynik pomiaru różni się od wartości prawdziwej, wartość tej różnicy nazywamy błędem ΔX .

Zatem błąd ΔX definiujemy jako różnica pomiędzy wynikiem pomiaru X a wartością prawdziwą (true value) x_0 . Błąd nie jest znany, ale opisujemy go funkcją rozkładu błędu. Taka funkcja rozkładu powinna mieć własności matematyczne adekwatne do opisu zjawiska opisującego mechanizmy powstawania błędów. W literaturze można znaleźć dwa modele matematyczne opisujące rozrzut danych pomiarowych i niedokładności pomiarów: probabilistyczny i zbiorów rozmytych. W modelu probabilistycznym zakłada się, że zarówno wynik pomiaru, jak i błąd są zmiennymi losowymi. W modelu zbiorów rozmytych wynik pomiaru i błąd są zmiennymi rozmytymi. Oba te pojęcia są opisane w podrozdziałach poniżej. Modele te różnią się własnością miary jaką zastosujemy do wyznaczenia rozkładu błędów. Miara probabilistyczna jest addytywna a miara możliwości (będąca podstawą zbiorów rozmytych) jest maksymalna [31, 49] (te idee opisujemy w podrozdziałach poniżej). Modele te różnią się interpretacją mechanizmów powstawania błędów. W modelu probabilistycznym pomiar jest rozumiany jako losowanie, z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa ze zbioru wartości zmiennej losowej reprezentującej mierzoną wielkość.

W modelu zbiorów rozmytych nie mamy do czynienia z procesem losowania zdarzeń ze zbioru zdarzeń elementarnych [49]. Pomiar polega na porównywaniu wartości mierzonej

z wartością wzorca, z punktu widzenia teorii zbiorów rozmytych miara możliwości opisuje stopień przynależności (membership function) kolejnego wzorca do badanego obiektu ([49, 50]). Miara dopasowania wzorca do obiektu powinna reprezentować ten proces dopasowania. Jeśli badany obiekt podlega przypadkowym fluktuacjom to naturalne jest użycie probabilistycznej miary addytywnej do opisu tego zjawiska. Jeśli nie obserwujemy takich fluktuacji i szacujemy niepewność metodą ekspercką na podstawie wiedzy o systemie pomiarowym to proces ten opiszemy miarą maksytywną. Miara maksytywna opisuje proces wyboru najlepszego a tak zazwyczaj działają eksperci. Funkcja przynależności opisuje stopień w jakim wzorzec reprezentuje badany obiekt i stopień w jakim wartość mierzonej wielkości reprezentuje badany obiekt. Szacowanie stopnia przynależności wymaga korzystania z wiedzy ogólnej w sposób, który nazywa się eksperckim.

Dwa różne podejścia do konstrukcji miary rozkładu mierzonych wielkości i błędów pomiarowych (rys 3.2) można w przypadku szacowania metodą A można ściśle powiązać pokazując, że istnieje transformacja rozkładu probabilistycznego w zbiór rozmyty zachowująca wartość niepewności rozszerzonej. Idee to opisujemy w rozdziale poniżej.

Kluczowym krokiem dla teorii jest połączenie niepewności typu A i typu B. Zakładamy, że można wyróżnić dwa składniki błędów: błędy typu A i błędy typu B, ale identyfikujemy je z błędem systematycznym $\Delta_s X$ i błędem niesystematycznym $\Delta_r X$, co zapisujemy jako

$$\Delta X = \Delta_r X + \Delta_s X$$

W języku zbiorów rozmytych możemy to zapisać jako złożenie (dodawanie) zbiorów rozmytych $\bar{A}_r$ i $\bar{A}_s$ ([44]), gdzie: A_r jest składnikiem niesystematycznym (typ A) oraz A_s jest składnikiem systematycznym (typ B) opisanym przez charakterystyczną funkcję przedziału $[-\Delta_m x, +\Delta_m x]$ (równanie (3.25)):

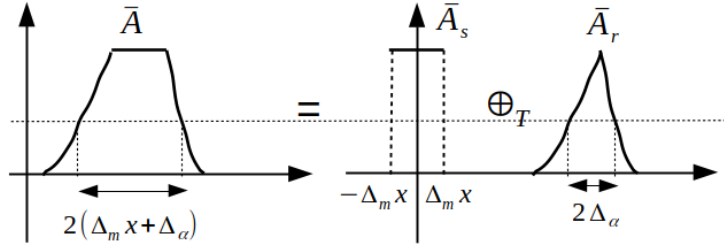
$$\bar{A} = \bar{A}_r \oplus_T \bar{A}_s, \tag{1.2}$$

$$U(\bar{A}) = U(\bar{A}_r \oplus_T \bar{A}_s) = U(\bar{A}_r) + U(\bar{A}_s),$$

gdzie: $\Delta_m x$ jest największym dopuszczalnym błędem,

Δ_α - promień cięcia na poziomie α [42].

Należy tu podkreślić, że w teorii pomiaru istnieje pojęcie pierwotniejsze od pojęcia nie-



Rysunek 1.1: Zbiór rozmyty opisujący błąd i jego składowe

pewności. Jest to pojęcie progu. Próg pozwala na zadanie porządku pomiędzy mierzonymi obiektami ([42, 1]).

Jeśli rozważymy strukturę empiryczną $\langle V, \prec, \circ \rangle$ oraz odwzorowanie pomiarowe $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$, tzn. jako $\phi(a)$ rozumiemy liczbę rzeczywistą, która jest wynikiem pomiaru (obarczonym błędem !) mierzonej wielkości (obiektu) $a \in V$, to jako próg rozumiemy funkcję $\delta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, która zadaje porządek pomiędzy „wynikami pomiaru” w rozważanej, badanej strukturze, tzn.:

$$a \prec b \iff \phi(a) + \delta(a, b) < \phi(b).$$

Idąc dalej, relacja pomiędzy progiem a niepewnością może być opisana na dwa sposoby (patrz [42]):

- 1) Niepewność $U(a)$ jest progiem minimalnym między obiektem a a obiektami punktowymi b_0 , tzn.

$$U(a) = \inf_{b_0 \in V} \delta(a, b_0).$$

Obiekty punktowe są obiektami idealnymi, dla których niepewność jest zerowa.

- 2) Próg $\delta(a, b)$ jest niepewnością różnicy $a \ominus b$ dwóch obiektów:

$$\delta(a, b) = U(a \ominus b),$$

gdzie operacja odejmowania $\ominus$ jest zdefiniowana jako operacja wykonywana przez komparator.

W przypadku zmiennych losowych niepewność opisana jest przez odchylenie standardowe, wobec czego uzyskujemy naturalną definicję progu, która w przypadku, gdy zmienne lo-

sowe opisujące obiekty a i b są niezależne, jest dana przez

$$\delta(a, b) = U(a \ominus b) = \sqrt{U^2(a) + U^2(b)}.$$

Przypomnijmy teraz

Twierdzenie 1.1. [1] Niech w V będzie określona relacja $\prec$ zdefiniowana przez parę funkcji $\phi : V \rightarrow [0, \infty]$ oraz $\delta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jako $a \prec b \iff \phi(a) + \delta(a, b) < \phi(b)$. Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne:

- relacja $\prec$ spełnia warunek Ferrersa (jest biporządkiem)
- próg δ jest dekomponowalny na składowe niezależne:

$$\delta(a, b) = \Delta(a) + \Delta(b), \quad a, b \in V.$$

Jeśli dodatkowo próg jest nieujemny: $\Delta(a) \geq 0$, to relacja $\prec$ jest tzw. porządkiem interwałowym (przedziałowym), który opisujemy (podobnie jak własność Ferrersa) w rozdziale 5. W rozdziale 5 pracy rozważamy porządek, który nie jest spełnia własności Ferrersa, lecz osłabioną własność Ferrersa (patrz rozdział 5). Toteż możemy zapytać, jak wyglądałby próg δ w takiej sytuacji. Ogólnie można przyjąć (patrz [42]), że próg można rozłożyć na dwie składowe:

- 1) składową $\delta_s(a, b)$ dekomponowalną na dwa niezależne składniki:

$$\delta_s(a, b) = \Delta(a) + \Delta(b)$$

- 2) składową $\epsilon(a, b)$ niedekomponowalną na sumę niezależnych składników.

Jeśli założymy, że dekompozycja jest opisywana przez sumę algebraiczną (założenie o addytywności składowych błędów) dwóch składników, to:

$$\delta(a, b) = \Delta(a) + \Delta(b) + \epsilon(a, b).$$

Wzór ten odpowiada zapisaniu błędów jako sumy błędu systematycznego i niesystematycznego (przypadkowego).

1.4 Zbiory rozmyte i ich własności. T-normy.

Zanim przejdziemy do formalnych definicji, dobrze jest krótko omówić podstawową ideę. Zbiór rozmyty zdefiniowany jest poprzez funkcję przynależności, tzn. funkcję, która każdemu elementowi pewnego zbioru Ω przypisuje wartość z przedziału $[0, 1]$ (a nie tylko 0 lub 1, jest to uogólnienie klasycznej funkcji charakterystycznej zbioru). Wartości tej funkcji nazywamy stopniem przynależności. Opisuje ona jak bardzo dany element zbioru Ω przynależy do opisywanego obiektu. Wartość 1 mają te elementy zbioru Ω , o których wiemy, że na pewno poprawnie opisują badane obiekty. Przyjmuje się, że zbiór rozmyty jest właśnie wykresem takiej funkcji przynależności.

Definicja 1.2. (Zbiór rozmyty)

Zbiorem rozmytym $\bar{A}$ w $\mathbb{R}$ nazywamy wykres dowolnej funkcji

$$\bar{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad (1.3)$$

gdzie $\bar{A}(\cdot)$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego $\bar{A}$. Utożsamiamy zbiór rozmyty z jego funkcją przynależności.

Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych na $\mathbb{R}$ oznaczamy przez $\mathbb{F}(\mathbb{R})$.

Definicja 1.3. (α -przekrój)

α -przekrój $[\bar{A}]^\alpha$ zbioru rozmytego $\bar{A}$ w $\mathbb{R}$ dla $\alpha \in (0, 1]$ definiujemy jako:

$$[\bar{A}]^\alpha := \{x \in \mathbb{R} \mid \bar{A}(x) \geq \alpha\}. \quad (1.4)$$

Oddzielnie definiujemy 0-przekrój (nośnik zbioru rozmytego):

$$[\bar{A}]^0 = \text{supp}(\bar{A}) = \text{cl}(\{x \in \mathbb{R} \mid \bar{A}(x) > 0\}).$$

Jest to matematyczne oznaczenie operacji, gdzie bierzemy wszystkie liczby rzeczywiste x takie, że $\bar{A}(x) > 0$ oraz granice ciągów tych liczb. Dodatkowo, 1-przekrój nazywamy rdzeniem zbioru rozmytego.

Przykład 1.4. Funkcja $\bar{A}(x) = |\sin x|, x \in \mathbb{R}$ wyznacza zbiór rozmyty. Mamy tu $[\bar{A}]^1 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $[\bar{A}]^0 = \mathbb{R}$ oraz $[\bar{A}]^\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\arcsin(\alpha) + k\pi, \pi - \arcsin(\alpha) + k\pi]$.

Zbiór rozmyty, którego wszystkie α –przekroje są odcinkami w $\mathbb{R}$ nazywamy przedziałem rozmytym. Funkcja $\bar{A}(x)$ z powyższego przykładu jest także przedziałem rozmytym. Każdy przedział rozmyty wyznaczony jest jednoznacznie poprzez swoje α –przekroje. Aby to lepiej uzasadnić, zdefiniujemy tzw. rodzinę zgodną (patrz [42]).

Definicja 1.5. Niech Ω będzie zbiorem i $\mathbf{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ będzie rodziną podzbiorów Ω . Rodzinę podzbiorów nazywamy rodziną zgodną, gdy:

1. $A_\alpha \neq \emptyset$ dla każdego $\alpha \in (0, 1)$,
2. dla każdego $\alpha, \beta \in (0, 1)$ takiego, że $\alpha \leq \beta$ zachodzi $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

Przykład 1.6. Dla $\alpha \in (0, 1)$ definiujemy $A_\alpha = \left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$. Wtedy dla $0 < \alpha \leq \beta < 1$ zachodzi $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$ oraz $-\frac{1}{\alpha} \leq -\frac{1}{\beta}$ stąd $A_\beta \subseteq A_\alpha$. Zatem $\mathbf{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ definiuje rodzinę zgodną.

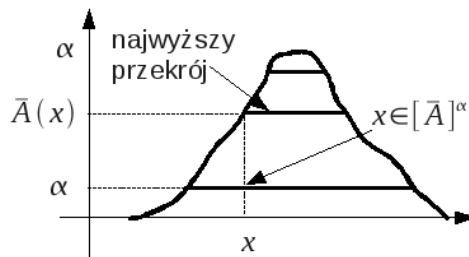
Jeśli $\mathbf{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ i $\mathbf{B} = (B_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ są dwoma rodzinami podzbiorów, definiujemy $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, jeśli $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ dla każdego $\alpha \in (0, 1)$.

Okazuje się, że przy pomocy rodziny zgodnej można wygenerować zbiór rozmyty.

Definicja 1.7. Niech $\mathbf{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ będzie rodziną zgodną podzbiorów zbioru Ω . Zbiór rozmyty zdefiniowany jako:

$$\bar{A}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1)} \{\alpha : x \in A_\alpha\} \quad (1.5)$$

nazwiemy zbiorem rozmytym w Ω generowanym przez zgodną rodzinę $\mathbf{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$, zbiór taki oznaczmy $\mathcal{F}(\mathbf{A})$, gdzie: $\sup$ oznacza kres górny, przy czym $\sup \emptyset = 0$.



Rysunek 1.2: Konstrukcja funkcji przynależności generowanej przez zgodną rodzinę zbiorów

Symbol $\mathcal{F}$ oznacza operację generowania funkcji przynależności zbioru rozmytego $\bar{A}(x)$ ze zgodnej rodziny podzbiorów $\mathbf{A}$, czyli: $\bar{A}(x) = \mathcal{F}(\mathbf{A})(x)$.

Zauważmy, że operacja kresu górnego $\sup$ pozwala na przejście od opisu funkcji przynależności poziomiami (α -przekrojami), do opisu poprzez wartości funkcji (opisu danego „słupkami”). Wreszcie możemy sformułować następujący:

Lemat 1.8. ([20] twierdzenie 2.1, [10] rozdział II.1.C) Niech $\bar{A}$ będzie zbiorem rozmytym na Ω .

1. α -przekroje $[\bar{A}]^\alpha$ tworzą zgodną rodzinę podzbiorów zbioru Ω ,
2. zbiór rozmyty wygenerowany z α -przekrojów zbioru $\bar{A}$ daje ten zbiór rozmyty:

$$\bar{A}(x) = \mathcal{F}(\mathbf{A})(x)$$

gdzie $\mathbf{A} = \{[\bar{A}]^\alpha\}_{\alpha \in (0,1)}$ jest rodziną przekrojów zbioru rozmytego $\bar{A}$.

Kolejnym niezbędnym pojęciem jest T-norma. T-norma $T(x, y)$ (skrót od normy trójkątnej-spełnia nierówność trójkąta) reprezentuje iloczyn logiczny rozmytych wartości logicznych $x, y \in [0, 1]$ (a nie tylko 0 lub 1 jak w klasycznej logice). Innymi słowy, wartość logiczna zdań x i y jest dana przez $T(x, y)$. Formalnie, definiujemy T-normę przy pomocy następujących warunków.

Definicja 1.9. (t-norma) T-normą nazywamy dowolną funkcję dwóch zmiennych $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, która spełnia następujące własności dla $a, b, c \in [0, 1]$:

- 1) Przemienność: $T(a, b) = T(b, a)$
- 2) Monotoniczność: $T(a, b) \leq T(c, d)$ gdy $a \leq c$ oraz $b \leq d$
- 3) Łączność: $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- 4) Liczba 1 działa jak element identycznościowy: $T(a, 1) = a$

T-norma nie jest wyznaczona jednoznacznie, istnieje nieskończenie wiele różnych T-norm (poniżej są klasyczne przykłady). Suma logiczna w logice rozmytej opisana jest przez tzw. konormę S , natomiast negacja poprzez funkcję n . Pomiedzy tymi trzema funkcjami zachodzi ścisły związek wynikający z tego, że zakłada się, że niektóre własności logiki klasycznej powinny obowiązywać także w logice rozmytej (patrz [42]).

Klasyczne przykłady T-norm to z pewnością:

- T norma minimum, $T_{\min}(x, y) = \min(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$
- T norma produktowa, $T_{\text{prod}}(x, y) = x \cdot y$, $x, y \in [0, 1]$
- Drastyczna T-norma,

$$T_D(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x = 1 \\ x & \text{if } y = 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- T-norma Łukasiewicza, $T_{uk}(x, y) = \max(0, x + y - 1)$, $x, y \in [0, 1]$
- T-norma Hademachera,

$$T_H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x + y - xy} & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Twierdzenie 1.10. (Zasada Rozszerzeń Zadeha) Dla dwóch zbiorów rozmytych $\bar{A}$ oraz $\bar{B}$ zachodzi następująca równość, nazywana Zasadą Rozszerzeń Zadeha (patrz [57]):

$$f_*^{(\min)}(\bar{A}, \bar{B})(z) = \sup_{f(x,y)=z} \{ \min(\bar{A}(x), \bar{B}(y)) : (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \}, \quad (1.6)$$

W dalszej części pracy będziemy pisać po prostu „zasada rozszerzania” albo „zasada Zadeha”. Zauważamy, że możemy na to spojrzeć nieco ogólniej, mianowicie powyższa zasada opoarta jest o wzięcie T-normy min, którą można zastąpić dowolną T-normą.

Twierdzenie 1.11. (Uogólniona Zasada Rozszerzeń Zadeha [10]) Niech działanie dwuargumentowe będzie dane odwzorowaniem:

$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ i T jest ustaloną t-normą.

Funkcja f indukuje odwzorowanie $f_*^{(T)} : \mathcal{FS}(\Omega_1) \times \mathcal{FS}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{FS}(\Omega_3)$ określone wzorem:

$$f_*^{(T)}(\bar{A}, \bar{B})(z) = \sup_{f(x,y)=z} \{ T(\bar{A}(x), \bar{B}(y)) : (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \}, \quad z \in \Omega_3 \quad (1.7)$$

gdzie $\bar{A} \in \mathcal{FS}(\Omega_1)$ i $\bar{B} \in \mathcal{FS}(\Omega_2)$ są zbiorami rozmytymi odpowiednio w Ω_1 i Ω_2 .

Dla dodawania, czyli $f(x, y) = x + y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, zasada rozszerzania definiuje arytmetykę $\oplus_T$ opartą o t-normy:

$$(\bar{A} \oplus_T \bar{B})(x) = \sup_{x+y=z} \{T(\bar{A}(x), \bar{B}(y)) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad z \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Twierdzenie 1.11 w ujęciu Zadeha jest definicją natomiast w teorii zmiennej rozmytej jest twierdzeniem wynikającym z własności miary maksymalnej [5]

1.5 Porządki na zbiorach rozmytych.

W celu poprawnego matematycznego opisu pomiaru, musimy mieć dobrze zdefiniowany porządek, który np. pozwoli odróżnić od siebie dwie serie pomiarów.

Definicja 1.12. (porządek przedziałowy) Dla dwóch przedziałów na $\mathbb{R}$, powiedzmy $\bar{a}, \bar{b}$ (nieco nietypowa notacja) definiujemy tzw. porządek przedziałowy przez:

$$\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow \forall (x \in \bar{a} \text{ oraz } y \in \bar{b}) \quad x < y \quad (1.9)$$

Definicja 1.13. (porządek częściowy) Relację $\preceq$ na zbiorze A będziemy nazywać częściowym porządkiem, jeśli spełnia następujące trzy właściwości:

- zwrotność: $\forall a \in A \quad a \preceq a$
- antysymetryczność: $\forall a, b \in A \quad a \preceq b \wedge b \preceq a \rightarrow a = b$
- przechodniość: $\forall a, b, c \in A \quad a \preceq b \wedge b \preceq c \rightarrow a \preceq c$

Definicja 1.14. (porządek liniowy) Częściowy porządek $(A, \preceq)$ nazywamy liniowym, jeżeli każde dwa elementy są porównywalne, tzn.

$$\forall a, b \in A \quad a \preceq b \vee b \preceq a$$

Twierdzenie 1.15. (twierdzenie Nguyen-Fullér-Keresztfalvi ([33, 17, 47, 4])).

Dla dwóch zbiorów rozmytych $\bar{A}, \bar{B}$ na $\mathbb{R}$ zachodzi:

$$[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2 : T(p,q) \geq \alpha\}} \{y - x : y \in [\bar{B}]^p, x \in [\bar{A}]^q\} \quad (1.10)$$

Co więcej, z twierdzenia Nguyen-Fullér-Keresztfalvi (patrz [33, 17] oraz [47])) wynika, że:

$$\begin{aligned}
 [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha &= \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} \{y - x : y \in [\bar{B}]^p, x \in [\bar{A}]^q\} \\
 &= \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} [\bar{B}]^p - [\bar{A}]^q \\
 &= \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) = \alpha\}} [\bar{B}]^p - [\bar{A}]^q
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdzie „ $-$ ” jest odejmowaniem przedziałowym. Ostatnia równość jest naszym wynikiem z pracy [47].

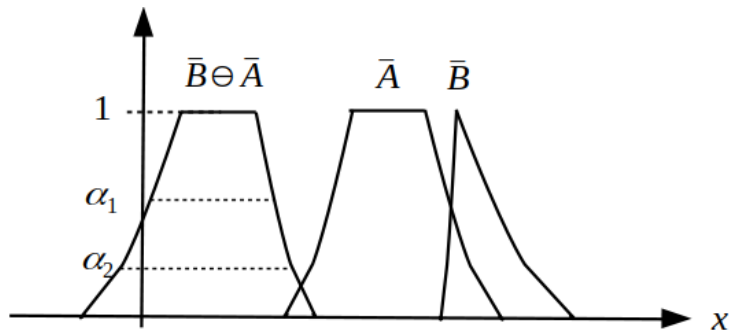
Definicja 1.16. Niech $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ będzie rodziną zbiorów rozmytych na $\mathbb{R}$. Relacja porządku na zbiorach rozmytych $\prec_T^\alpha$ na poziomie α dla $\alpha \in (0, 1]$ jest zdefiniowana jako [42]:

$$\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B} \iff [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha > 0. \tag{1.12}$$

gdzie $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Innymi słowy, $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B} \iff [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha \subset \mathbb{R}_+$ (gdzie $\mathbb{R}_+$ jest zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich).

Ten porządek został wprowadzony przez Urbańskiego w pracy [42, Rozdział 5.3.3] za pomocą rozmytego opisu komparatora w naukach pomiarowych. Własności tego porządku zostały opisane w [48].



Rysunek 1.3: Przykład porządku rozmytego, dla α_1 mamy $\bar{A} \prec_T \bar{B}$, lecz dla α_2 zbiory $\bar{A}$ oraz $\bar{B}$ są nieporównywalne

Definiujemy też

$$\bar{A} \succ_T^\alpha \bar{B} \iff [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha < 0,$$

oraz

$$\bar{A} \sim_T^\alpha \bar{B} \iff 0 \in [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha$$

(patrz Rys. 1.3.).

W powyższym $\ominus_T$ jest odejmowaniem danym przez t - normę oraz $<$ jest porządkiem przedziałowym (tzn. gdy I oraz J są przedziałami, $I < J$ gdy $\{j - i; \quad j \in J, i \in I\} \subset (0, \infty)$). Rozważany powyżej porządek jest naturalnym uogólnieniem porządku przedziałowego [30].

Zauważmy, że zbiory rozmyte mogą być rozważane jako rodziny α -przekrojów (patrz Lemat 1.8), a więc uogólnienie porządku przedziałowego polega na wyznaczeniu dla każdego przekroju α relacji pomiędzy zbiorami rozmytymi na wzór porządku przedziałowego.

Ponieważ w zbiorze interwałów mamy zdefiniowaną arytmetykę [30], definicję porządku przedziałowego można zapisać przez odejmowanie i nierówność ostrą względem zera:

$$\bar{a} < \bar{b} \iff \bar{b} - \bar{a} > 0 \iff \{y - x | y \in \bar{b} \text{ oraz } x \in \bar{a}\} \subset \mathbb{R}_+ \quad (1.13)$$

gdzie odejmowanie przedziałów zdefiniowane jest poprzez [30]:

$$\bar{b} - \bar{a} = \{y - x | x \in \bar{a} \text{ oraz } y \in \bar{b}\}. \quad (1.14)$$

W przypadku gdy zbiory rozmyte $\bar{A}$ oraz $\bar{B}$ są dane jako funkcje charakterystyczne przedziałów $\bar{a}$ oraz $\bar{b}$, porządek (1.12) to zwykły porządek przedziałowy, a zatem jest homotetyczny oraz spełnia tzw. własność Ferrersa. Niech $\bar{a} = [a_1, a_2]$ oraz $\bar{b} = [b_1, b_2]$, gdzie $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \bar{a} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \bar{a} \end{cases} \quad (1.15)$$

oraz

$$\bar{B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \bar{b} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \bar{b} \end{cases} \quad (1.16)$$

W takim przypadku, wynik odejmowania dwóch zbiorów rozmytych jest niezależny od

przyjętej t -normy. Istotnie, dla dowolnego α zachodzi

$$\left[\bar{B} \ominus_T \bar{A}\right]^\alpha = \bar{b} - \bar{a} = [b_1, b_2] - [a_1, a_2] \quad (1.17)$$

gdzie $-$ jest zwykłym (punktowym) odejmowaniem przedziałowym. To wynika np. z twierdzenia NFK (patrz (1.11)).

W teorii pomiarów porządek empiryczny jest zdefiniowany przez empiryczne porównanie dwóch obiektów albo sygnałów [24]. Porównanie ze sobą dwóch obiektów jest możliwe przy pomocy komparatora, którym może być np. waga szalkowa lub komparator napięcia. Wzór (1.12) opisuje działanie rozmytego komparatora jako układu, który ustala porządek poprzez odejmowanie.

Rozdział 2

Pomiar i skale pomiarowe

2.1 Pomiar w teorii reprezentacji

Z punktu widzenia teorii reprezentacji, pomiar jest opisany przy pomocy homomorfizmu struktury empirycznej $(\mathbb{X}, \prec, \circ)$ w strukturę matematyczną $(\mathbb{Y}, <, \oplus)$ (patrz np. [14, 13, 55, 34, 32, 24]):

$$\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}. \quad (2.1)$$

Struktura matematyczna $\mathbb{Y}$ opisuje wyniki pomiaru (wielkości fizyczne) i reprezentuje własności obiektów mierzonych. Odwzorowanie (homomorfizm) $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ opisuje w pewnym sensie proces poznania (z punktu widzenia wybranych własności). Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem pomiarowym. Poprawność opisu rozważanej struktury przy pomocy f opiera się na tym, że f zachowuje strukturę (jest homomorfizmem [32, 25]). Kluczową rolę odgrywa to, czym dla nas w określonej sytuacji jest $\mathbb{Y}$. Możemy rozważyć cztery przypadki:

1. Jeśli $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ oraz $\oplus = +$ to znaczy

$$f : (\mathbb{X}, \prec, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}, \prec, +)$$

to mówimy wtedy, że pomiar jest idealny, bez błędów

2. Jeśli $\mathbb{Y} = \mathbb{I}$ oraz $\oplus$ jest tzw. dodawaniem przedziałowym, to znaczy

$$f : (\mathbb{X}, \prec, \circ) \rightarrow (\mathbb{I}, \prec, \oplus),$$

gdzie dla dwóch przedziałów I_1, I_2 definiujemy tu

$$I_1 \oplus I_2 = \{a + b; a \in I_1, b \in I_2\},$$

to mówimy wtedy, że pomiar jest opisany reprezentacją przedziałową, a jego wynik zawiera błąd systematyczny.

3. Jeśli $\mathbb{Y} = (\mathbb{P}, \mathbb{X})$, gdzie P jest jakąś miarą prawdopodobieństwa oraz X jest jakąś zmienną losową, ponadto $\oplus = +$ to zwykle dodawanie, to znaczy

$$f : (\mathbb{X}, \prec, \circ) \rightarrow ((\mathbb{P}, \mathbb{X}), \prec, +)$$

to mówimy wtedy, że pomiar jest opisany reprezentacją probabilistyczną, a jego wynik zawiera błąd przypadkowy. Reprezentujemy wynik pomiaru zmienną losową, odchylenie standardowe wyraża rozrzut.

4. Jeśli $\mathbb{Y} = (\mathcal{F}(\mathbb{A}), \mathbb{A})$ oraz $\oplus = +$ to znaczy

$$f : (\mathbb{X}, \prec, \circ) \rightarrow ((\mathcal{F}(\mathbb{A}), \mathbb{A}), \prec, +)$$

to mówimy wtedy, że pomiar opisany jest zbiorem rozmytym.

Innymi słowy f musi być reprezentacją struktury empirycznej $\mathbb{X}$ w strukturę algebraiczną $\mathbb{Y}$. Jeśli odwzorowanie pomiarowe f jest izomorfizmem, to nazywamy je silną reprezentacją i możemy wtedy założyć, że matematyczna struktura $\mathbb{Y}$ idealnie odzwierciedla strukturę empiryczną $\mathbb{X}$. Natomiast w przypadku, gdy f jest jedynie homomorfizmem (ale nie izomorfizmem), nazywamy je słabą reprezentacją. W tej pracy „słabą reprezentację” nazywamy reprezentacją.

W przypadku pomiarów wielkości fizycznych (atrybutów fizycznych) mamy do czynienia z pomiarami wielkości ekstensywnych (czyli pomiarami w skali ilorazowej), dlatego wyposażamy empiryczną strukturę $\mathbb{X}$ w dwie empiryczne operacje:

- (R1) operację porównania obiektów przy użyciu komparatora (np. wagi szalkowej),
 (R2) operację składania obiektów.

Z matematycznego punktu widzenia struktura empiryczna $\mathbb{X}$ jest wyposażona w dwie relacje oparte o te powyższe operacje, mianowicie:

1. relację binarną $\prec$ opartą na empirycznym porównaniu obiektów (ogólnie relacja $\prec$ może być przeciwzwrotna, tu przyjmujemy, że $\prec$ jest dowolnym uogólnionym porządkiem przedziałowym (z własnością przechodniości)),
2. binarną (tzn. dwuargumentową) relację addytywną $\oplus$ opartą na empirycznym składaniu obiektów.

Rozważmy strukturę empiryczną $\mathbb{X} = \langle X, \prec, \circ \rangle$, gdzie X jest zbiorem obiektów na którym jest zdefiniowana binarna operacja składania obiektów $\circ$ oraz binarna relacja porównywania obiektów $\prec$ dana przy pomocy komparatora, polegająca na porównywaniu wartości mierzonych wielkości fizycznych danych obiektów (np. porównując dwa obiekty przy pomocy wagi szalkowej sprawdzamy, który z nich jest cięższy). Jeśli istnieje homomorfizm [32, 34] struktury empirycznej $\langle X, \prec, \circ \rangle$ w strukturę algebraiczną liczb rzeczywistych $\langle \mathbb{R}, <, + \rangle$ gdzie $<$ jest porządkiem liniowym na $\mathbb{R}$ oraz „+” jest dodawaniem liczb rzeczywistych, to porządek może być zdefiniowany przez operację „−” przeciwną do dodawania: $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$, gdzie 0 jest liczbą zero w $\mathbb{R}$ (czyli elementem neutralnym dodawania). Zauważmy, że ze względu na równość $(a + b) - b = a$ (dla $a, b \in \mathbb{R}$) można stwierdzić, że zwykła operacja odejmowania dla liczb rzeczywistych jest odwrotnością operacji dodawania. W pracach [22, 40, 34, 32] zajmowano się warunkami gwarantującymi istnienie rozważanego tu homomorfizmu struktur. Samo istnienie takiego homomorfizmu (reprezentacji struktur) ze struktury empirycznej w strukturę algebraiczną implikuje, że pomiar opisany przez ten homomorfizm jest pomiarem idealnym bez błędów pomiarowych. W celu opisanie pomiarów obarczonych błędami można albo użyć reprezentacji przedziałowej [15, 32], albo modelu probabilistycznego [35] albo modelu opartego o zbiory rozmyte [26, 44]. Wtedy operacja odejmowania przedziałów, zmiennych losowych albo zbiorów rozmytych nie jest przeciwną operacją do operacji dodawania, tzn. $(a + b) - b \neq a$ w tych przypadkach.

W naszej pracy zakładamy, że można opisać strukturę empiryczną poprzez homomorfizm w strukturę rozmytą $\langle \mathbb{F}, \prec_T, \oplus_T \rangle$. Nie zajmujemy się tu problemem, kiedy taki homomorfizm istnieje. Własności homomorfizmu zależą od własności relacji porządku.

W przypadku porządku liniowego (porządek ten jest zwrotny, antysymetryczny i przechodni oraz każde dwa elementy rozważanego zbioru można ze sobą porównać (patrz definicja w rozdziale poniżej)) pokazuje się istnienie homomorfizmu w liczby rzeczywiste. Taki homomorfizm opisuje pomiar idealny bowiem zdefiniowana jest relacja równoważ-

ności (zgodna z porządkiem) pozwalająca na podział zbioru elementów rzeczywistości na klasy równoważności i pomiar jest idealny w sensie tego, że nie ma błędów. Reprezentacja przedziałowa opisuje błędy systematyczne czyli takie których nie da się zmniejszyć przez uśrednianie danych. Efekt zmniejszania niepewności przy uśrednianiu danych możliwy jest dla porządków stochastycznych (tu brak teorii reprezentacji dla probabilistyki) oraz porządków rozmytych zaproponowanych w [42]. Własności takich porządków opisane są w pracy [48].

2.2 Skale pomiarowe

Formalna definicja pomiaru kształtowała się w tle wielu sporów i nieporozumień, które były wynikami różnych intuicji, które ludzie mieli na ten temat (patrz [39]). Przyjęto, że pomiarem nazywamy przyporządkowanie obiektom wartości według ustalonych zasad ([39]). Zatem przyporządkowanie to zależy od reguł, według których przyporządkowujemy. Prowadzi to do wyróżnienia różnych skal pomiarowych oraz różnych rodzajów pomiaru. Oto wyjaśnienie różnych skal pomiarowych używanych w statystyce i badaniach naukowych. Istnieją cztery podstawowe skale pomiarowe ([39]): nominalna (ang. nominal), porządkowa (ang. ordinal), interwałowa (ang. interval) i ilorazowa (ang. ratio). Każda skala posiada specyficzne cechy, które determinują sposób analizy i interpretacji danych. Wymienimy poniżej te skale z drobną ich charakterystyką.

1. Skala Nominalna

- Reprezentuje dane bez wewnętrznego porządku
- Używana do etykietowania lub klasyfikacji danych
- Używana do danych, których nie można matematycznie manipulować (np. dodawać do siebie)
- Przykłady danych pomiarowych: płeć, kolor oczu, grupa krwi, narodowość

2. Skala Porządkowa

- Reprezentuje dane z tzw. rangą (np. twardość minerału)
- Różnice między wartościami nie są jednolite ani precyzyjnie mierzalne

- Przykłady danych pomiarowych: twardość minerału, ocena satysfakcji klienta, poziomy wykształcenia

3. Skala Interwałowa

- Zawarte są w niej miary statystyczne, np. przedział ufności
- Nie ma tzw. punktu zerowego. Ten punkt odniesienia, jakim jest punkt zerowy, jest punktem umownym.
- Pozwala na dodawanie i odejmowanie mierzonych danych (używając arytmetyki przedziałowej)
- Przykłady danych pomiarowych: temperatura w salach Celsjusza lub Fahrenheita, lata kalendarzowe

4. Skala Ilorazowa

- Jest najczęściej używana w fizyce
- Posiada prawdziwy punkt zerowy (np. zero abolsutne–tnz. bezwzględne)
- Na danych możemy wykonywać operacje arytmetyczne, według klasycznych reguł arytmetyki (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie)
- Możliwe są porównania i obliczanie proporcji
- Przykłady danych pomiarowych: wzrost, waga, wiek, dochód, liczba dzieci

Zrozumienie zastosowania tych czterech skal pomiarowych pomaga wybierać odpowiednie metody statystyczne i techniki analizy danych w zależności od rodzaju posiadanych danych.

Rozdział 3

Niepewność w modelu probabilistycznym i zbiorów rozmytych

W celu opisu niepewności w modelu zbiorów rozmytych opiszemy podstawowe pojęcia modelu zarówno probabilistycznego, jak i opartego o zbiory rozmyte. W modelu probabilistycznym zakłada się, że zarówno wynik pomiaru, jak i błąd są zmiennymi losowymi. W modelu zbiorów rozmytych wynik pomiaru i błąd są zmiennymi rozmytymi. Oba te pojęcia są opisane w podrozdziałach poniżej.

3.1 Zmienna losowa

Punktem wyjścia dla teorii prawdopodobieństwa jest miara probabilistyczna zdefiniowana na rodzinie podzbiorów przestrzeni zdarzeń elementarnych. Formalnie rzecz biorąc, potrzebujemy matematycznej struktury, nazywanej σ -ciałem. Pozwoli to nam formalnie rozważać prawdopodobieństwo np. teoriomnogościowej sumy albo iloczynu dwóch zdarzeń elementarnych.

Niech Ω oznacza zbiór zdarzeń elementarnych i niech 2^Ω oznacza tzw. zbiór potęgowy zbioru Ω , tzn. zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Ω , łącznie ze zbiorem pustym $\emptyset$ i całym zbiorem Ω . Teraz potrzebujemy jeszcze struktury, która będzie zawierać teoriomnogościowe sumy i iloczyny zbiorów wziętych z 2^Ω .

Definicja 3.1. Rodzinę podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ nazywamy σ -ciałem, gdy spełnione są następujące warunki:

- zbiór pusty należy do $\mathcal{F}$ tzn.

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

- dopełnienie zbioru należącego do $\mathcal{F}$ należy do $\mathcal{F}$ tzn.

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$$

- suma przeliczalnie wielu zbiorów należących do $\mathcal{F}$ należy do $\mathcal{F}$, tzn.

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Prawdopodobieństwo jest funkcją dobrze określoną na σ -ciele $\mathcal{F}$.

Definicja 3.2. Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję P o wartościach w zbiorze $[0, 1]$, określoną na σ -ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, spełniającą warunki:

- (i) $P(B) \geq 0$ dla każdego $B \in \mathcal{F}$
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) Jeśli $B_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \dots$ oraz $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ to:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i). \quad (3.1)$$

W szczególności

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \text{ dla } k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Warunek (iii) oznacza, że miara probabilistyczna jest skończenie lub przeliczalnie addytywna. Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest zbiorem, $\mathcal{F}$ jest σ -ciałem, natomiast P jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{F}$, nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 3.3. Sumę zbiorów nazywamy przeliczalną, jeśli jest ona skończona suma zbiorów $A_1 \cup \dots \cup A_n$ lub sumą zbiorów indeksowaną liczbami naturalnymi, tzn. $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podobnie określamy przeliczalny przekrój zbiorów czy dopełnienie (dopełnienie skończonej sumy lub dopełnienie sumy nieskończonej, ale indeksowanej liczbami naturalnymi).

Definicja 3.4. Zbiór borelowski to taki zbiór, który można uzyskać ze zbiorów otwartych za pomocą przeliczalnych sum, przekrojów bądź dopełnień.

Definicja 3.5. Zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy dowolną rzeczywistą funkcję mierzalną $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tzn. funkcję X spełniającą warunek $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ dla każdego zbioru borelowskiego $B \subseteq \mathbb{R}$.

Można powiedzieć, że zmienna losowa przypisuje liczbę rzeczywistą danemu wynikowi eksperymentu losowego.

Przykład 3.6. Rzut monetą: zdarzeniu „orzeł” przypisujemy 1, natomiast zdarzeniu „reszka” przypisujemy 0 (mamy tu tzw. zmienną losową dyskretną).

Zmienna losowa X indukuje na $\mathbb{R}$ miarę probabilistyczną μ_X zwaną jej rozkładem:

$$\mu_X(S) = P(X^{-1}(S)), \quad (3.3)$$

gdzie $S \subseteq \mathbb{R}$. Najczęściej używana jest notacja $P(S)$ zamiast $P(X^{-1}(S))$.

Miara P zadaje dystrybuantę zmiennej losowej wzorem:

$$F(x) = \mu_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) (= P(X \leq x)). \quad (3.4)$$

Dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej X wyraża prawdopodobieństwo tego, zmienna losowa X przyjmie wartość mniejszą, bądź równą od x .

Podstawowe własności dystrybuanty to:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ (dystrybuanta jest funkcją niemalejącą).

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X zadany może być poprzez dystrybuantę lub poprzez funkcję gęstości prawdopodobieństwa f_X (jeśli istnieje):

$$\mu_X(S) = P(X^{-1}(S)) = \int_{x \in S} f_X(x) dx \quad (3.5)$$

Funkcję gęstości wprowadza się dla zmiennych losowych ciągłych. Podstawowe własności funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$ to:

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
3. $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ (dla zmiennej losowej ciągłej X funkcja gęstości jest pochodną dystrybuanty).

Z definicji funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$ wynika praktyczny sposób obliczania prawdopodobieństwa, że wartość zmiennej losowej znajduje się w określonym przedziale, powiedzmy $[a, b]$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3.6)$$

Dalej będziemy zakładać, że w przypadku badania zjawisk fizycznych mierzalnych ilościowo (w skali ilorazowej) istnieje funkcja rozkładu prawdopodobieństwa opisująca te zjawiska.

Próg opisuje odróżnialność i porządek zmierzonych wielkości, czyli próg powinien być tak zdefiniowany, aby zadawał porządek $\prec$ zmiennych losowych. Załóżmy, że odróżnialność dwóch pomiarów opisanych zmiennymi losowymi X^a i X^b oznacza, że prawdopodobieństwo przecięcia się dwóch zmiennych losowych opisujących dwa pomiary jest wystarczająco małe. Wyrazimy to przez prawdopodobieństwo różnicy zmiennych losowych:

$$X^a \prec X^b \Leftrightarrow P(X^b - X^a > 0) > p_k, \quad (3.7)$$

gdzie p_k jest prawdopodobieństwem bliskim jedności, określającym stopień zaufania relacji $X^a \prec X^b$.

Warunek (3.7) można wyrazić przy pomocy promienia przedziału ufności. Zdefiniujemy przedział ufności wokół punktu x_0 o promieniu $U_p(X)$ jako:

$$P(x_0 - U_p(X) < X < x_0 + U_p(X)) = p \quad (3.8)$$

gdzie x_0 jest tak dobranym punktem, aby:

$$P(-\infty < X < x_0 - U_p(X)) = P(x_0 + U_p(X) < X < +\infty) = \frac{1-p}{2} = p_k \quad (3.9)$$

Wielkość $U_p(X)$ opisuje niepewność rozszerzoną w teorii niepewności.

Warunek $P(X > 0) > p_k$ wyrazić można jako $x_0 - U_p(X) > 0$. Jeśli założymy, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jest symetryczny, to $x_0 = E(X)$. Po zastosowaniu tego do zmiennej losowej $X^a - X^b$ otrzymujemy:

$$X^a \prec X^b \Leftrightarrow E(X^b - X^a) - U(X^b - X^a) > 0 \quad (3.10)$$

Czyli:

$$X^a \prec X^b \Leftrightarrow E(X^a) + U(X^b - X^a) < E(X^b) \quad (3.11)$$

Progiem opisującym porządek zmiennych losowych jest zatem niepewność różnicy zmiennych losowych reprezentujących porównywane obiekty:

$$\delta(X^a, X^b) = U(X^b - X^a) \quad (3.12)$$

3.2 Zmienna rozmyta

W definicji zbiorów rozmytych Zadeh nie konstruował zbioru rozmytego jako rozkładu zmiennej rozmytej. Takie podejście zaproponował Nahmias [31], proponując strukturę definicji miar rozmytych analogiczną do aksjomatyki probabilistyki. W tym ujęciu odzorowanie pomiarowe

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie Ω to zbiór obiektów mierzalnych, jest traktowane jako zmienna rozmyta. W ogólności, zmienna rozmyta ξ to funkcja o wartościach rzeczywistych, zdefiniowana na zbiorze wzorców Γ , tzn. $\xi : \Gamma \rightarrow [0, 1]$. Zmienna rozmyta jest miarą wielkości mierzonej: $\xi(\gamma)$ jest wartością wielkości mierzonej dla wzorca $\gamma \in \Gamma$.

Podobnie jak w probabilistyce, definiuje się miarę możliwości $\Pi : 2^\Gamma \rightarrow [0, 1]$, gdzie Γ to zbiór wzorców¹. Miara możliwości jest unormowana i maksytywna: $\Pi(\emptyset) = 0$, $\Pi(\Gamma) = 1$ oraz $\Pi(D \cup B) = \max(\Pi(D), \Pi(B))$ dla każdych $D, B \in \Gamma$, gdzie T -norma reprezentuje logiczną koniunkcję „i” w logice rozmytej. Trzeba tu jasno podkreślić, że jest ona zdefiniowana na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$, więc w szczególności np. $T(0.2, 0.3)$ ma sens. Funkcja

¹Zbiór wzorców to zbiór ciał będących wzorcami np. zbiór odważników

przynależności jest rozkładem zmiennej losowej rozmytej ξ :

$$\bar{A}_\xi(x) = \Pi(\xi^{-1}(x)) \quad (3.13)$$

Pomiar w ujęciu rozmytych zmiennych losowych polega na wyznaczeniu miary podobieństwa badanego obiektu do zbioru wzorców Γ . Narzędziem pozwalającym porównać dany obiekt z elementami zbioru wzorców jest komparator.

3.3 Niepewność

Na początku przedstawmy podstawowe założenia dotyczące niepewności, następnie wniknijmy w jej definicję probabilistyczną oraz fuzzy. Przedstawimy nasze rozważania w postaci krótkich podrozdziałów poniżej.

3.3.1 Podstawowe założenia teorii niepewności

1. Błąd jest różnicą pomiędzy wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą. Błędu i wartości prawdziwej nie znamy.
2. Niepewność jest parametrem rozkładu błędu. Np.: odchylenie standardowe, promień przedziału ufności, przekrój zbioru rozmytego.
3. Metody estymacji niepewności dzielimy ze względu na źródło informacji o niepewności
 - metoda A: seria danych i metoda statystyczna,
 - metoda B: zasady oceny eksperckiej - „fuzzy”.
4. Składanie składowych niepewności odbywa się zgodnie z zasadami matematycznymi składania rozkładów (dodawanie zbiorów rozmytych jest analogiczne do wyznaczania rozkładu sumy zmiennych losowych).
5. Niepewność rozszerzona - promień przedziału ufności estymatora mesurandu,
6. Algorytm praktyczny wyznaczania niepewności rozszerzonej jako promienia przekroju zbioru rozmytego.

3.3.2 Błąd pomiaru i modele błędów

Jeśli założymy, że istnieje wartość prawdziwa dla danego pomiaru, to możemy wynik pomiaru zapisać jako:

$$X = x_0 + \delta X \quad (3.14)$$

gdzie x_0 – wartość prawdziwa oraz δX – błąd (prawdziwy), natomiast X – wynik pomiaru. Wyróżniamy teraz dwa modele błędów:

1. model probabilistyczny z miarą addytywną prawdopodobieństwa P , czyli X i δX – zmienne losowe,
2. model zmiennej rozmytej (zbiorów rozmytych) z maksymalną miarą możliwości Π , czyli X i δX – zmienne rozmyte,
 - model przedziałowy jako szczególny przypadek zbiorów rozmytych (funkcja przynależności jest prostokątna)

3.3.3 Niepewność jako parametr rozkładu błędu

W dwóch różnych podejściach niepewność może być traktowana jako parametr odpowiedniego rozkładu błędu.

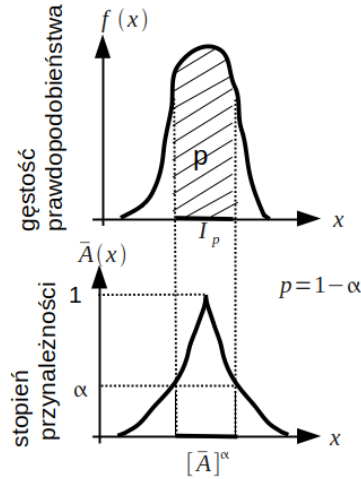
1. δX – zmienna losowa
niepewność = parametr rozkładu prawdopodobieństwa błędu charakteryzującego rozrzut,
2. δX – zmienna rozmyta
niepewność rozmyta = parametr rozkładu możliwości błędu (czyli parametr zbioru rozmytego).

Dodajmy wyjaśnienie, o jaki parametr rozkładu prawdopodobieństwa nam chodzi.

1. Odchylenie standardowe zmiennej X oznaczamy przez $u(X) = s(\Phi(X))$
2. Niepewność rozszerzona U_p na poziomie ufności p – promień przedziału ufności - daje pełną informację o rozkładzie, daje podstawę decyzji dla określonego prawdopodobieństwa p

Jeśli chodzi o model rozmyty, to parametrem zbioru rozmytego będzie promień przekroju zbioru rozmytego.

1. Promień przekroju na poziomie α oznaczamy przez $rad([\bar{A}]^\alpha)$
2. W zbiorach rozmytych nie ma naturalnego odpowiednika odchylenia standardowego



Rysunek 3.1: przedział ufności i przekrój zbioru rozmytego

3.3.4 Addytywność błędu i składanie niepewności

W pomiarze wielkości ekstensywnych składowe błędy można rozłożyć na składowe:

$$\delta X = \sum_{i=1}^N \delta X_i \quad (3.15)$$

Na podstawie zasady dodawania zmiennych losowych wyprowadza się składanie niepewności.

Przykład: niepewność standardowa. Jeśli składowe δX_i są niezależne to:

$$u(X) = \sigma(X) = \sigma \left(\sum_{i=1}^N \delta X_i \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma^2(X_i)} \quad (3.16)$$

Sumę błędów liczymy z reguły:

$$\delta Z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta X + \frac{\partial f}{\partial y} \delta Y \quad (3.17)$$

3.3.5 Składanie niepewności rozszerzonej dla dwóch członów

Założmy, że błąd można rozdzielić na dwie składowe, tzn.:

$$\delta X = \delta X_1 + \delta X_2 \quad (3.18)$$

Symbole δX_1 i δX_2 oznaczają zmienne losowe reprezentujące błędy. Wtedy niepewność rozszerzoną błędów otrzymujemy w kolejnych krokach:

1. z danych doświadczalnych (serii pomiarów) wyznaczamy rozkład X_1 i X_2 i wartość mesurandu - zazwyczaj średnią,
2. wyznaczamy rozkład zmiennej losowej δX :

$$F_{(\delta X_1, \delta X_2)}(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (3.19)$$

gdzie F_i jest dystrybuantą błędu δX_i oraz C jest funkcja kopuli opisująca korelację zmiennych losowych.

3. rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędu ma więc postać:

$$f_{\delta X}(x) = \iint_{x_1+x_2=x} f_{(\delta X_1, \delta X_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.20)$$

gdzie: $f_{(\delta X_1, \delta X_2)}(x_1, x_2) = \frac{d^2}{dx_1 dx_2} F_{(\delta X_1, \delta X_2)}(x_1, x_2)$

4. numerycznie wyliczamy przedział ufności I_p dla zadanego p .

3.3.6 Składanie niepewności rozmytej

Założmy, że można wyróżnić dwie składowe błędów: $\delta X = \delta X_1 + \delta X_2$. Symbole δX_1 i δX_2 oznaczają zmienne rozmyte reprezentujące błędy.

W teorii zbiorów rozmytych równanie zapiszemy to w postaci sumy zbiorów rozmytych:

$$\overline{\delta X} = \overline{\delta X_1} \oplus_T \overline{\delta X_2} \quad (3.21)$$

gdzie $\overline{\delta X}$ oznacza zbiór rozmyty zmiennej δX czyli rozkład zmiennej rozmytej δX , $\oplus_T$ - operacja dodawania zbiorów rozmytych opisująca rozkład zmiennej. Równanie to

zastępuje równanie dla rozkładów (3.20). Operacja dodawania jest dla konkretnej T -normy wyznaczona przez tzw. Zasadę Rozszerzeń Zadeha (tw 1.11).

3.4 Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość

Przestrzeń probabilistyczna to trójka $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, gdzie Ω jest niepustym zbiorem, zwanym przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{B}$ jest tzw. σ -ciałem, przestrzenią zdarzeń losowych oraz P jest miarą probabilistyczną (o wartościach w zbiorze $[0, 1]$).

Przestrzeń możliwości to para (Γ, Π) , gdzie Γ jest zbiorem wzorców oraz Π jest miarą możliwości. Zauważmy, że sigma algebra (sigma ciało) nie jest tu obecne, bo miara możliwości jest maksymalna (a nie multiplikatywna jak w przypadku klasycznej miary prawdopodobieństwa). Innymi słowami, miara możliwości wybiera te zdarzenia, które lepiej spełniają zadane kryteria.

Aby skonstruować transformację struktury probabilistycznej w strukturę rozmytą, należy zauważyć, że obie mogą być uważane za struktury algebraiczne: $(\mathcal{F}, \oplus)$, gdzie $\mathcal{F}$ jest zbiorem zmiennych losowych albo zmiennych rozmytych oraz $\oplus$ jest dodawaniem zmiennych losowych albo zmiennych rozmytych. Operacja dodawania zależy od właściwości miary losowej lub miary rozmytej odpowiednio dla zmiennych losowych i rozmytych. Istnieje wiele takich transformacji w literaturze, ale tu zakładamy, że transformacja ta zachowuje dodawanie oraz promień przedziału ufności mediany estymatora (patrz[41, 42]).

Niech T będzie ciągłą i archimedejską t -normą z addytywnym generatorem t . Niech $\alpha \in (0, 1]$ oraz $\bar{A} \in \mathcal{FK}(\mathbb{R})$. Wtedy dla $N = 2n + 1$:

$$[\text{Med}_N(\bar{A})]^\alpha = [\bar{A}]^{t^{[-1]}(\frac{2}{N+1}t(\alpha))} \quad (3.22)$$

dla każdego $\alpha \in (0, 1]$.

Przedział ufności na poziomie prawdopodobieństwa p można wyznaczyć za pomocą równania:

$$P(I_p) = p \quad (3.23)$$

Niepewność rozszerzona na poziomie ufności p jest równa promieniowi (rad) przedziału ufności. Oznaczamy $U_p = \text{rad}(I_p)$. Definicja niepewności rozszerzonej w Przewodniku jest niejednoznaczna: zakłada się, że przedział ufności można zastosować tylko do metody A.

Jest to niespójność, której chcemy uniknąć.

Proponujemy jednolity opis w strukturze rozmytych zdań. Zakładamy, że przedział ufności odpowiada α -przekrojowi (przekrojowi na poziomie α) zbioru rozmytego reprezentującego wynik pomiaru. W niektórych artykułach zakłada się, że można powiązać α -przekrój z poziomem ufności danym przez $p = 1 - \alpha$. To może być również uogólnione dla innych przypadków. Zakładając, że relacja między poziomem ufności a poziomem rozmytym przyjmuje postać $p = 1 - \alpha$, otrzymujemy rozmyty zbiór $\bar{A}_X$, który reprezentuje zmienną losową X . Rozmyty zbiór $\bar{A}_X$ jest dany przez dystrybuantę F_X zgodnie z równaniem:

$$\bar{A}_X(x) = \begin{cases} 2F_X(x) & \text{for } x \leq Me(X) \\ 2 - 2F_X(x) & \text{for } x > Me(X) \end{cases} \quad (3.24)$$

gdzie $Me(X)$ jest medianą zmiennej losowej X oraz F_X jest dystrybuantą zmiennej losowej X .

Zbiory rozmyte otrzymane z transformacji prawdopodobieństwo-możliwość opisują składową niepewności typu A, podczas gdy równania (3.24) definiują zbiór rozmyty typu $L - R$ (dla rozkładów jednomodalnych, tzn. takich, które mają jedną wartość maksymalną (modalną)).

Rozkład zmiennej rozmytej reprezentującej błędy typu B jest wyznaczony na podstawie decyzji eksperta, tj. zbiór rozmyty reprezentujący błędy typu B jest wyznaczony na podstawie dotychczasowego doświadczenia oraz na podstawie ogólnej wiedzy. Na przykład, jeśli uznamy błąd typu B za systematyczny, możemy przedstawić go za pomocą funkcji charakterystycznej przedziału. Jest tak dlatego, że błędy systematyczne są modelowane w przedziałach, podczas gdy rozkład jednostajny także reprezentuje przedział.

Zbiór rozmyty $\bar{A}$ reprezentujący sumę błędów typu A i B ma rozkład dany przez sumę zbiorów rozmytych $\bar{A}_A$ i $\bar{A}_B$:

$$[\bar{A}]^\alpha = [\bar{A}_A \oplus_T \bar{A}_B]^\alpha = [\bar{A}_A]^\alpha + [\bar{A}_B]^\alpha \quad (3.25)$$

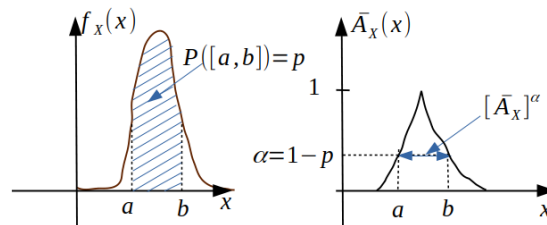
Jeśli błąd typu B ma rozkład prostokątny, otrzymujemy arytmetyczną sumę niepewności dla niepewności połączonej.

Zaproponowana przez prof. Urbańskiego ([42]) transformacja prawdopodobieństwo-możliwość (ang. possibilist-probability) przekształca rozkład prawdopodobieństwa w zbiór rozmyty tak, aby niepewność rozszerzona obliczona dla modelu probabilistycznego była

równa niepewności obliczonej dla modelu rozmytego (ang. fuzzy approach). Na rysunku 3.2 pokazano jakościowo rozkład probabilistyczny i zbiór rozmyty. Przedział ufności $[a, b]$ na poziomie p definiujemy jako przedział spełniający warunek $P(X \in [a, b]) = p$. Niepewność rozszerzoną oznaczamy przez $U_p(X) = rad(I_p)$. Niepewność fuzzy oznaczamy przez $rad([\bar{A}_X]^\alpha)$. Aby niepewność rozszerzona była równa klasycznej musimy wiedzieć, że

$$[\bar{A}_X]^\alpha = I_p = [a, b].$$

To jest założenie transformacji prawdopodobieństwo-możliwość (ang. probability to possibility).



Rysunek 3.2: Rozkład gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$ zmiennej losowej X i rozkład możliwości $\bar{A}_X(x)$ zmiennej rozmytej (zbiór rozmyty). Przedział $[a, b]$ jest przedziałem ufności na lewym rysunku i α -cut zbioru rozmytego $\bar{A}_X$ na prawym.

Założmy teraz, że F_X jest ciągłą dystrybuantą zmiennej losowej X (na pewnej przestrzeni probabilistycznej). Zdefiniujmy

$$I_p = \left[F_X^{-1} \left(\frac{1-p}{2} \right), F_X^{-1} \left(\frac{1+p}{2} \right) \right]$$

gdzie $p \in (0, 1)$. Zauważmy, że $\{I_p\}_{p \in (0,1)}$ jest rodziną zgodną [51]. Zatem w myśl powyższych rozważań zachodzi

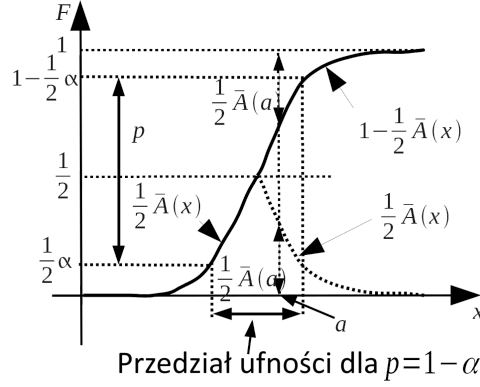
$$[\bar{A}_X]^\alpha = I_p = \left[F_X^{-1} \left(\frac{1-p}{2} \right), F_X^{-1} \left(\frac{1+p}{2} \right) \right].$$

Zauważmy też, że odwrotna transformacja dana jest przez:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}A(x) & \text{for } x \leq Me(X) \\ 1 - \frac{1}{2}A(x) & \text{for } x > Me(X), \end{cases} \quad (3.26)$$

gdzie Me_X jest medianą zmiennej losowej X .

Założmy teraz, że zbiory rozmyte A_X oraz A_Y są wyznaczone przez X oraz Y odpo-



Rysunek 3.3: Konstrukcja funkcji przynależności z założenia, że α -przekrój wyznacza przedział ufności.

wiednio. Rozważmy $Z = X + Y$. Wtedy tzw. Zasada Rozszerzona Zadeha mówi nam, że:

$$A_Z(z) = A_{X+Y}(z) = (A_X \oplus_T A_Y)(z) = \sup(T(A_X(x), A_Y(y)); x + y = z),$$

dla dowolnych $z \in \mathbb{R}$, gdzie T jest jakąś zadaną t -normą.

Można zatem zapytać, czy A_Z wyznaczone z transformacji prawdopodobieństwo-możliwość jest takie samo, jak A_Z dane powyżej. To prowadzi do fundamentalnego pytania, jaki jest związek funkcji Copuli z podejścia probabilistycznego do zadanej T -normy z podejścia fuzzy. Opiszemy to dokładnie w poniższym podrozdziale.

3.4.1 Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość: warunek zgodności.

Zgodnie z tw. Sklara istnieje funkcja $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (tzw. funkcja Copuli), która jednoznacznie określa łączny rozkład prawdopodobieństwa, jeśli dystrybuanty $F_X(x)$, $F_Y(y)$ oraz $F_{X,Y}(x, y)$ są ciągłe:

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (3.27)$$

To pozwala nam uzyskać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Mając powyższe na uwadze, możemy zapytać, jaka jest relacja między t -normą T a funkcją Kopuły C , aby uzyskać ten sam rozkład (np.) sumy zmiennych losowych: $F_{Z=X+Y}$ dla przypadku klasycznego i rozmytego?

Mamy

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{(Z=X+Y)}]^\alpha &= [\mathcal{A}_X \oplus_T \mathcal{A}_Y]^\alpha = \bigcup_{\{(\xi, \eta), T(\xi, \eta) \geq \alpha\}} ([\mathcal{A}_X]^\xi \cup [\mathcal{A}_Y]^\eta) = \\ &= \bigcup_{T(1-\beta, 1-\gamma) \geq \alpha} \left[F_X^{-1} \left(\frac{1-\beta}{2} \right) + F_Y^{-1} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right), F_X^{-1} \left(\frac{1+\beta}{2} \right) + F_Y^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

gdzie $\xi = 1 - \beta, \eta = 1 - \gamma$.

Z drugiej strony

$$[\mathcal{A}_Z]^\alpha = \left[F_Z^{-1} \left(\frac{1-p}{2} \right), F_Z^{-1} \left(\frac{1+p}{2} \right) \right].$$

($\alpha = 1 - p$)

Aby zatem zapisać sumę jako jeden przedział, musimy zminimalizować:

$$F_X^{-1} \left(\frac{1-\beta}{2} \right) + F_Y^{-1} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right)$$

oraz zmaksymalizować

$$F_X^{-1} \left(\frac{1+\beta}{2} \right) + F_Y^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right)$$

na zwartym podzbiornie (podzbiornie $[0, 1]^2$) $\{(1-\beta, 1-\gamma), T(1-\beta, 1-\gamma) = \alpha\}$ (zakładamy tu, że T jest ciągłą T -normą).

Zatem

$$F_Z^{-1} \left(\frac{1-p}{2} \right) = \min_{\{(1-\beta, 1-\gamma), T(1-\beta, 1-\gamma) = \alpha\}} F_X^{-1} \left(\frac{1-\beta}{2} \right) + F_Y^{-1} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right),$$

oraz dla prawego końca

$$F_Z^{-1} \left(\frac{1+p}{2} \right) = \max_{\{(1-\beta, 1-\gamma), T(1-\beta, 1-\gamma) = \alpha\}} F_X^{-1} \left(\frac{1+\beta}{2} \right) + F_Y^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right).$$

Podstawiając $\kappa = \frac{1-p}{2}, \xi = \frac{1-\beta}{2}, \eta = \frac{1-\gamma}{2}$ otrzymujemy

$$F_Z^{-1}(\kappa) = \min_{\{(2\xi, 2\eta), T(2\xi, 2\eta) = 2\kappa\}} F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta).$$

Aby zminimalizować oraz zmaksymalizować możemy np. użyć Metody Mnożników Lagrange'a.

Stosując tą metodę, przy założeniu, że t -norma T jest różniczkowalna minimalizujemy

jemy funkcję I :

$$I(\xi, \eta) = F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta) + \lambda T(\xi, \eta). \quad (3.28)$$

Różniczkując po ξ i η mamy układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{dF_X^{-1}(\xi)}{d\xi} + \lambda \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{dF_Y^{-1}(\eta)}{d\eta} + \lambda \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dystrybantę $F_Z(z)$ wyznacza się ze wzoru:

$$F_Z^{-1}(\kappa) = F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta) \quad (3.30)$$

dla $\kappa = T(\xi, \eta)$ i dla ξ i η wyznaczonych z (3.29).

Zauważmy, że układ (3.29) implikuje, że:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} \frac{dF_Y^{-1}(\eta)}{d\eta} &= \frac{dT}{d\eta} \frac{dF_X^{-1}(\xi)}{d\xi} \\ T(\xi, \eta) &= \kappa (= \kappa(\xi, \eta)) \end{aligned}$$

W tym równaniu dane jest $\frac{dF_Y^{-1}(\eta)}{d\eta}$ oraz $\frac{dF_X^{-1}(\xi)}{d\xi}$ (znamy to od początku), i chcemy je rozwiązać ze względu na T . Nasze równanie jest równaniem liniowym cząstkowym pierwszego rzędu, i możemy je rozwiązać metodą charakterystyk—linii, wzdłuż których rozwiązujemy równanie, a które pokrywają całą dziedzinę, na której nasze równanie jest zdefiniowane. Zauważmy, że równanie można przepisać w następujący sposób:

$$\left(\frac{dF_Y^{-1}(\eta)}{d\eta}, -\frac{dF_X^{-1}(\xi)}{d\xi} \right) \circ \left(\frac{dT}{d\xi}, \frac{dT}{d\eta} \right) = 0$$

Podstawmy $z(s) = T(\xi(s), \eta(s))$. Wtedy $z'(s) = \left(\frac{dT}{d\xi}, \frac{dT}{d\eta} \right) \circ (\xi'(s), \eta'(s))$. Teraz znajdziemy charakterystyki : jeśli

$$\begin{cases} \xi'(s) &= \frac{dF_Y^{-1}(\eta(s))}{d\eta} \\ \eta'(s) &= -\frac{dF_X^{-1}(\xi(s))}{d\xi} \end{cases}$$

(możemy to rozwiązać, bo znamy $\frac{dF_Y^{-1}(\eta(s))}{d\eta}$ oraz $-\frac{dF_X^{-1}(\xi(s))}{d\xi}$ oraz warunki początkowe zadania), to używając naszego równania mamy :

$$z'(s) = \left(\frac{dT}{d\xi}, \frac{dT}{d\eta} \right) \circ (\xi'(s), \eta'(s)) = \left(\frac{dF_Y^{-1}(\eta)}{d\eta}, -\frac{dF_X^{-1}(\xi)}{d\xi} \right) \circ \left(\frac{dT}{d\xi}, \frac{dT}{d\eta} \right) = 0$$

tzn. $z(s) = T(\xi(s), \eta(s)) \equiv \text{const} = z(0) = T(\xi_0, \eta_0) = \kappa(\xi_0, \eta_0)$. Zatem T jest stałe na tzw. charakterystykach. Reasumując, znaleźliśmy funkcję $T(\xi, \eta)$ która jest stała na charakterystykach - krzywych pokrywających dziedzinę, i wychodzących od warunku początkowego zadania—tzw. punkt początkowy.

Jaki jest zatem związek t-normy T z funkcją kopuły C ?

Odpowiedź : dla dowolnego $\kappa \in [0; 0.5]$ musi zachodzić następujące równanie

$$\kappa = T(\xi, \eta) = \int \int_{F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta) = \min_{T(\xi, \eta) = \kappa} (F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta))} C_{x,y}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Zatem wartość całki z $C_{x,y}$ po powierzchni wyznaczonej przez $T(\xi, \eta) = \kappa$ (równaniem $F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta) = \min_{T(\xi, \eta) = \kappa} (F_X^{-1}(\xi) + F_Y^{-1}(\eta))$) musi być równa κ dla dowolnego $\kappa \in [0; 0.5]$. I to jest poszukiwany związek na C (a właściwie na $C_{x,y}$).

3.4.2 Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość jako homomorfizm struktur.

Zauważmy, że transformacja prawdopodobieństwo-możliwość może być traktowana jako odwzorowanie ze struktury probabilistycznej w strukturę fuzzy. Ściśle rzecz biorąc, możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\varphi : \langle F_p, <, + \rangle \rightarrow \langle F_F, <_T, +_T \rangle$$

dane przez

$$\varphi(X) = \bar{A}_X.$$

Tu chcemy podkreślić, że transformacja probability-possibility jest zdefiniowana przy użyciu dystrybuanty zmiennej losowej X . Zauważmy wtedy, że

$$\varphi(X + Y) = A_{X+Y} = A_X \oplus_T A_Y = \varphi(X) \oplus_T \varphi(Y),$$

zatem φ jest homomorfizmem pomiędzy dwiema różnymi strukturami algebraicznymi: klasyczną oraz fuzzy. Zdefiniujmy relację binarną $<_p$ na $< F_p, <, + > \times < F_p, <, + >$, gdzie $p \in [0, 1]$, przez

$$X <_p Y \iff P(Y - X > 0) > \frac{1}{2} + \frac{p}{2}.$$

Niech $p' = \frac{1}{2} + \frac{p}{2}$. Ponieważ

$$P(Y - X > 0) + P(Y - X \leq 0) = P(\Omega) = 1,$$

dostajemy

$$X <_p Y \iff P(Y - X \leq 0) = 1 - P(Y - X > 0) < 1 - p' \iff F_{Y-X}(0) < 1 - p'.$$

Naszym celem jest pokazanie, że

$$A_X <_{1-p} A_Y,$$

co oznacza, że transformacja φ (a więc transformata prawdopodobieństwo-możliwość) jest homomorfizmem zachowującym porządek pomiędzy dwiema strukturami algebraicznymi. Wystarczy wyznaczyć funkcję $\alpha(p)$, która spełnia

$$0 < [A_Y \ominus_T A_X]^{1-p} = [A_{Y-X}]^{1-p} = [F_{Y-X}^{-1}(\alpha(p)), F_{Y-X}^{-1}(1 - \alpha(p))]$$

a zatem

$$[F_{Y-X}^{-1}(\alpha(p)) > 0 \iff F_{Y-X}(0) < \alpha(p).$$

Z założenia:

$$F_{Y-X}(0) < 1 - p',$$

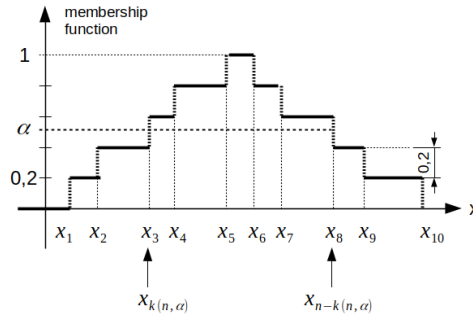
chcielibyśmy zatem, aby

$$1 - p' = \frac{1-p}{2} \leq \alpha(p). \tag{*}$$

Możemy np. wziąć $\alpha(p) = 1 - p$.

3.5 Wyznaczanie funkcji przynależności na podstawie danych pomiarowych (na podstawie [42])

Założmy, że w wyniku pomiaru otrzymujemy serię N danych $\{x_1, \dots, x_n\}$.



Rysunek 3.4: Empirical estimation of fuzzy set and α -cut in the case $n = 9$

Wyznaczanie funkcji przynależności można opisać za pomocą następującego algorytmu (fig. 3.4):

1. Sortujemy dane pomiarowe, uzyskując serię $x_1 < \dots < x_n$.
2. Dla wartości początkowej x_1 zakładamy, że $\bar{A}(x_1) = 0$.
3. Wyznaczamy $\bar{A}(x_i)$ rekurencyjnie:

Dla parzystych n , $i = 2, \dots, \frac{n}{2}$: $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) + \frac{2}{n}$

dla $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$ mamy: $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) - \frac{2}{n}$

zatem: $\bar{A}(x_{\frac{n}{2}+1}) = 1$.

Dla nieparzystych n : $i = 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) + \frac{2}{n}$

dla $i = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n$ mamy: $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) - \frac{2}{n}$

czyli: $\bar{A}(x_{\frac{n+1}{2}}) = 1$.

4. Dla $i = n$ mamy: $\bar{A}(x_{n+1}) = 0$.
5. Między punktami pomiarowymi funkcje przybliżamy prostymi poziomymi i uzyskujemy funkcję schodkową. Inne metody interpolacji wymagają dodatkowych założeń.

Uwaga 3.7. Zauważmy, że dane $x_1, x_2, \dots, x_n$ można zawsze posortować biorąc:

$$\begin{aligned} y_1 &= \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ y_2 &= \min\{\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \{y_1\}\} \\ y_3 &= \min\{\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \{y_1, y_2\}\} \\ &\vdots \\ y_n &= \min\{\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pracujemy teraz na posortowanych danych: $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Zakładając, że dokonujemy interpolacji przy pomocy wartości funkcji w prawym krańcu każdego przedziału podziału dziedziny, dostajemy następujący wzór dla parzystych n :

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} \frac{2}{n}(k-1) & \text{dla } x \in [y_{k-1}, y_k), \text{ gdzie } k = 1, \dots, \frac{n}{2} + 1 \\ 1 - \frac{2}{n}\left(p - \frac{n}{2}\right) & \text{dla } x \in [y_p, y_{p+1}), \text{ gdzie } p = \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{dla } x = y_n \end{cases} \quad (3.32)$$

Podobnie dla n nieparzystych, wystarczy tylko w powyższym zamienić n z $n+1$.

Ponieważ niepewność jest wyznaczona przez promień α -przekroju, mamy

$$[\bar{A}]^\alpha = [x_{k(n,\alpha)}, x_{n-k(n,\alpha)}] \quad (3.33)$$

gdzie $\{x_i\}_{i=1,n}$ jest ciągiem danych uporządkowanych (posortowanych) oraz $k(n, \alpha)$ jest numerem kolejnej danej tworzącej lewy koniec przekroju α (patrz rysunek 3.4)

$$k(n, \alpha) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2}\alpha \right\rceil & \text{dla parzystych } n \\ \left\lceil \frac{(n+1)}{2}\alpha \right\rceil & \text{dla nieparzystych } n \end{cases} \quad (3.34)$$

W powyższym funkcja $\lceil \cdot \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą, która jest większa bądź równa danej liczbie, np. $\lceil 4,6 \rceil = 5$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 0 \rceil = 0$, $\lceil -2,3 \rceil = -2$, itd.

Jeśli mesurandem jest wartość średnia z serii danych to należy wyznaczyć przekrój funkcji przynależności reprezentującej uśrednioną wartość dla konkretnej T -normy. W przypadku zbiorów rozmytych uśrednianie powoduje (jak w probabilistyce) zawężanie

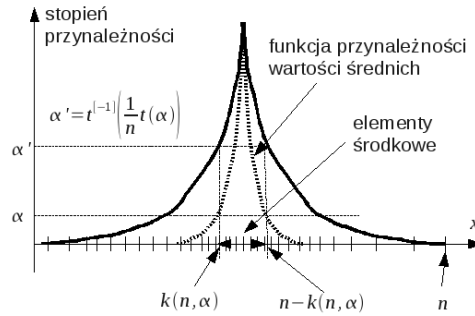
rozkładu. Można wyprowadzić wzór pozwalający na wyznaczenie przekroju rozkładu $\bar{A}_{\text{Ave}}$ średnich wartości:

$$[\bar{A}_{\text{Ave}}]^\alpha = [\text{Ave}_n(\bar{A})]^\alpha = [\bar{A}]^{(t^{[-1]}(\frac{1}{n}t(\alpha)))} \quad (3.35)$$

Formuła ta oznacza, że aby określić α -przekrój rozkładu średnich wartości na poziomie α , konieczne jest określenie α -przekroju wartości nie uśrednionych na poziomie $\alpha' = t^{[-1]}(\frac{1}{n}t(\alpha))$ (gdzie t jest generatorem addytywnym T-normy).

Aby zastosować ten wzór, należy ustalić nową wartość numeru danej (uporządkowanej):

$$k(n, \alpha) = \frac{1}{2}n\alpha' = \frac{1}{2}t^{[-1]}(\frac{1}{n}t(\alpha))n \quad (3.36)$$



Rysunek 3.5: Elementy środkowe definiujące α -przekrój funkcji przynależności wartości średnich

Niepewność rozmyta zostanie wyznaczona przez:

$$U_\alpha(a) = \frac{1}{2} (x_{n-k(n,\alpha)} - x_{k(n,\alpha)}) \quad (3.37)$$

Wartość $k(n, \alpha)$ zależy od ustalonej T-normy, która opisuje korelację w serii danych pomiarowych. W modelu probabilistycznym zakłada się zazwyczaj brak korelacji (co nie zawsze jest prawdą), przy takim założeniu można wyprowadzić wzory przybliżone [42]. Przedział $[x_{k(n,\alpha)}, x_{n-k(n,\alpha)}]$ ze wzoru (3.33) można zapisać przez liczbę punktów tworzących ten przedział:

$$K(n) = n - 2k(n, \alpha) = n \left(1 - t^{[-1]} \left(\frac{1}{n}t(\alpha) \right) \right) \quad (3.38)$$

Przybliżone wzory (odzwierciedlające brak korelacji) mają wtedy postać: dla małej liczby pomiarów: $K(n) = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{n}}$, natomiast dla dużego n : $K(n) = \sqrt{2n}$.

3.6 Analiza niepewności metodą zbiorów rozmytych na przykładzie pomiaru zmiennego pola magnetycznego [52]

W tym rozdziale podamy konkretny przykład analizy niepewności pola magnetycznego zmiennego metodą zbiorów rozmytych. Dla przejrzystości, ten rozdział podzielony jest na małe podrozdziały wyznaczające kolejne kroki w analizie naszego przykładu.

W przykładzie wykorzystano metodę indukcyjną pomiaru zmiennego pola magnetycznego w układzie cewki i wzmacniacza operacyjnego. Układ pomiarowy wyskalowany został przy pomocy pola wygenerowanego przez długi solenoid zasilany generatorem przy założeniu że pole solenoidu można wyznaczyć z prawa Ampera.

3.6.1 Algorytm wyznaczania niepewności

Opiszmy wpierw algorytm wyznaczania niepewności. Szacowanie niepewności przebiega w trzech etapach:

- A. • na podstawie serii danych pomiarowych uzyskanych w warunkach powtarzalności wyznacza się promień przedziału będącego przekrojem empirycznego zbioru rozmytego:

$$U_{\alpha}(a) = \frac{1}{2} \left(x_{n-k(n,\alpha)} - x_{k(n,\alpha)} \right)$$

- jeśli menzurandem jest wartość średnia wyznacza się przedział reprezentujący niepewność wartości uśrednionej dla zadanej t-normy

- B. metodą analizy eksperckiej (dane producenta) określa się największy błąd dopuszczalny .

- C. jeśli modelem składowej typu B jest rozkład jednostajny to niepewność złożona jest sumą uzyskanych składowych metodą A i B. W ogólnym przypadku należy wyznaczyć rozkład łączny dla zadanej t-normy.

Zilustrujmy algorytm wyznaczania składowej typu A:

tu promień przedziału opisującego przekrój liczby rozmytej jest dany przez $U_{\alpha}(a) = \frac{1}{2} \left(x_{n-k(n,\alpha)} - x_{k(n,\alpha)} \right)$, gdzie $k(n, \alpha)$ jest liczbą zależną od n i wyznaczaną wzorem $k(n, \alpha) = \frac{1}{2}n\alpha' = \frac{1}{2}t^{[-1]} \left(\frac{1}{n}t(\alpha) \right) n$.

3.6.2 Propagacja niepewności

Zakładamy, że błąd jest sumą składników, dla przykładu dwóch.

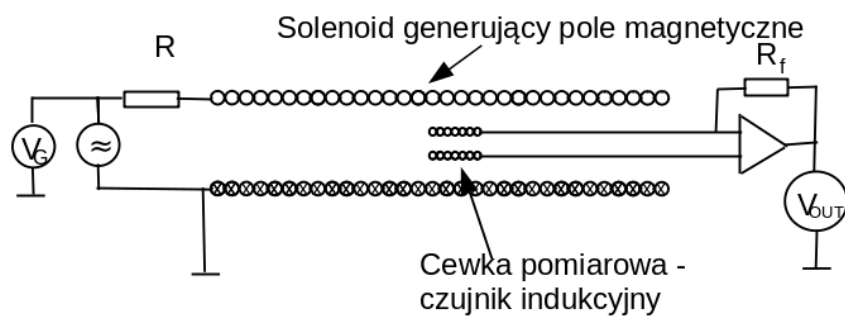
$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2 : \quad (3.39)$$

Jeśli wielkość mierzona X jest funkcją innych zmiennych $X = g(Z_1, Z_2)$ to każda składowa jest odpowiednią różniczką. Wtedy propagacja niepewności zależy od modelu:

1. w modelu probabilistycznym należy wyznaczyć rozkład zmiennej losowej ΔX i na tej podstawie wyliczyć promień przedziału ufności. Korelację pomiędzy składowymi opisuje funkcja kopuły C .
2. w modelu zbiorów rozmytych należy wyznaczyć rozkład możliwości (czyli funkcję przynależności). Korelację opisuje t-norma T :

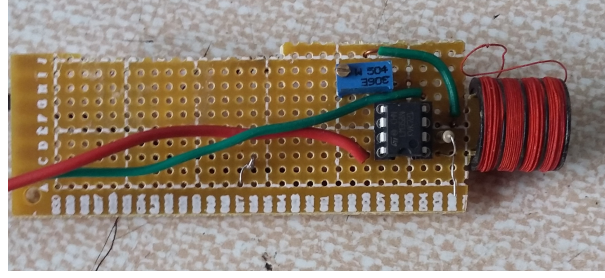
$$\bar{A}_X(x) = \sup_{x_1+x_2=x} \left(T \left(\bar{A}_1(x_1), \bar{A}_1(x_2) \right) \right) \quad (3.40)$$

3.6.3 Układ pomiarowy



Rysunek 3.6: Schemat układu wzorcowania miernika pola magnetycznego

Wzorcem pola jest solenoid jednowarstwowy o długości $l = 245mm$ ($\Delta l = 1mm$), średnicy wewnętrznej $D_1 = 37,0mm$ (zewnętrzna $D_2 = 38mm$) i liczbie zwojów na jednostkę długości $n_0 = \frac{77zw}{40mm} = 1,93/mm \pm 0,02/mm$. Indukcyjność $L_0 = 1,10mH$, rezystancja $R_0 = 4,91\Omega$.



Rysunek 3.7: Wzmacniacz z cewką pomiarową

3.6.4 Pole wzorcowe

Zakładamy, że pole definiuje prawo Ampera:

$$H = \frac{N}{l} I = n_0 I \quad (3.41)$$

Układ zasilany jest z generatora, którego napięcie mierzone jest oscyloskopem cyfrowym pozwalającym na pomiar napięcia skutecznego z błędem maksymalnym 1%. Ostatecznie indukcję magnetyczną B (wartość skuteczną) można wyliczyć ze wzoru:

$$B = \mu_0 \frac{U_G}{\sqrt{(\omega L_0)^2 + R_L^2}} n_0 \quad (3.42)$$

Pole jest proporcjonalne do napięcia:

$$B = \beta U_G \quad \text{gdzie} \quad \beta = \mu_0 \frac{n_0}{\sqrt{(\omega L_0)^2 + R_L^2}} \quad (3.43)$$

3.6.5 Błędy współczynnika β definiującego wzorzec pola.

$$\beta = \mu_0 \frac{n_0}{\sqrt{(\omega L_0)^2 + R_L^2}} = \mu_0 \frac{n_0}{Z} \quad (3.44)$$

gdzie $Z = \sqrt{(\omega L_0)^2 + R_L^2}$, dla częstotliwości $f = 10 \text{ kHz}$ $Z = 69,8 \Omega$, rezystancja $R = 9,81 \Omega$ wobec czego o błędach decyduje wielkość indukcyjności, budżet błędów zapiszemy w postaci względnej:

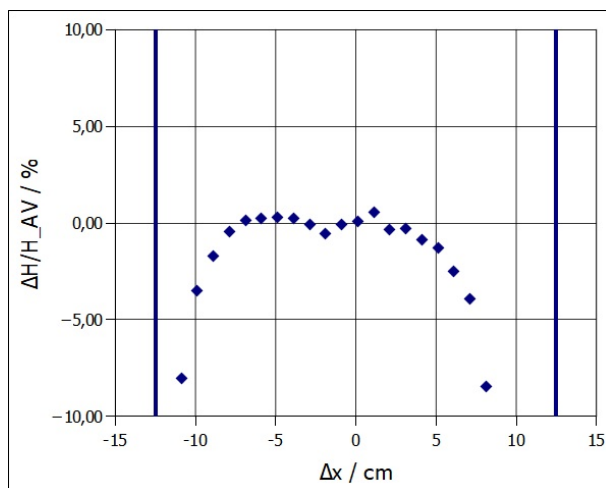
$$\frac{\delta \beta}{\beta} = \frac{\delta Z}{Z} + \frac{\delta n_0}{n_0} + \frac{\delta B_n}{B} \quad (3.45)$$

ostatni człon opisuje błąd wzoru z powodu niejednorodności pola.

3.6.6 Błędy współczynnika β

Obliczona wartość to $\beta = 3,47 \frac{s}{m^2}$, a składowe budżetu błędów można wykorzystać w modelu probabilistycznym lub rozmytym. Wartości maksymalne (oznaczone jako Δx) to:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta L}{L} &= \frac{0,01mH}{1,10mH} = 0,01 \\ \frac{\Delta n_0}{n_0} = \frac{\Delta l_0}{l_0} &= \frac{1mm}{245mm} = 0,004 \\ \frac{\Delta B_n}{B} &= 0,01 \end{aligned}$$



Rysunek 3.8: względna zależność natężenie pola w funkcji położenia czujnika

3.6.7 Wzmacniacz sygnału cewki

Układ wzmacniający sygnał z cewki pomiarowej pracuje jako przetwornik prąd na napięcie. Cewka pomiarowa jest cewką radiową antenową na fale średnie o indukcyjności $L_1 = 665\mu H$ i rezystancji $R_1 = 18,68 \pm 0,02\Omega$.

Częstotliwość charakterystyczna cewki jest dana przez $f_L = \frac{1}{2\pi} \frac{R_1}{L_1} = 4,48kHz$. Dla $f > f_L$ wzór na napięcie wyjściowe w funkcji strumienia magnetycznego układu ma postać:

$$U_2 = \Phi n_1 \frac{R_f}{L_1} = B S_1 n_1 \frac{R_f}{L_1} \quad (3.46)$$

gdzie R_f jest rezystancją sprzężenia zwrotnego oraz S_1 - pole powierzchni cewki pomia-

rowej. Z punktu widzenia metrologicznego ważna jest liniowość:

$$U_2 = \gamma B \quad (3.47)$$

współczynnik $\gamma = s_1 n_1 \frac{R_f}{L_1}$, ale wyznaczany będzie empirycznie.

3.6.8 Wyznaczanie współczynnika proporcjonalności α

$$U_2 = \gamma B \quad (3.48)$$

$$U_2 = aU_G + \Delta U_2 \quad (3.49)$$

$$B = \beta U_G + \Delta B_T \quad (3.50)$$

ΔB_T - błąd teorii.

Podstawiamy (3.50) do (3.48):

$$U_2 = \alpha(\beta U_G + \Delta B) \quad (3.51)$$

czyli: $a = \gamma\beta$ więc $\alpha = \frac{a}{\beta}$ pole B wyznaczamy z równania:

$$B = \frac{\beta}{a} U_2 \quad (3.52)$$

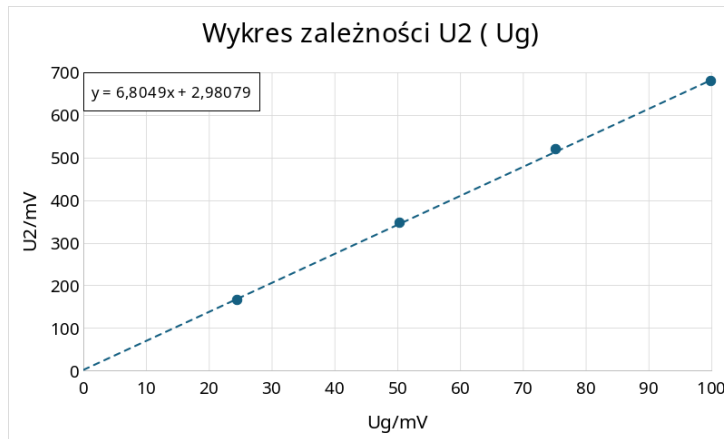
współczynnik a wyznaczany jest empirycznie, natomiast β z teorii.

3.6.9 Skalowanie przyrządu

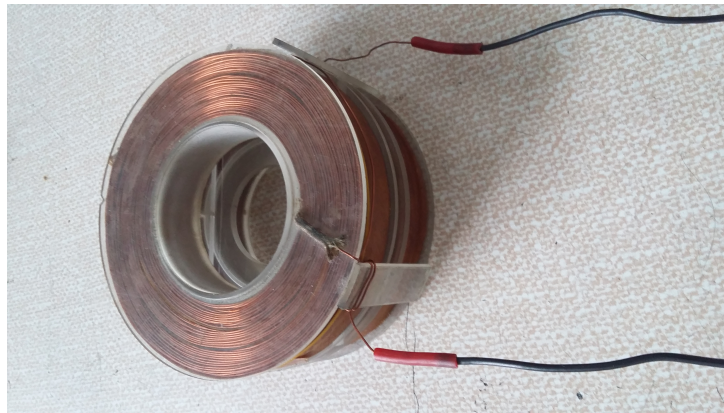
Dla częstotliwości $f = 10kHz$ wykonano serię pomiarów zależności napięcia wyjściowego U_2 wzmacniacza od napięcia generatora U_G . współczynnik nachylenia $a = 6,805$, odchylenie standardowe nachylenia $\sigma(a) = 0,0809$, współczynnik stały $\Delta U = 2,98mV$, odchylenie standardowe współczynnika stałego $\sigma(\Delta U_2) = 5,54mV$

3.6.10 Źródło pola

Źródłem pola, które zostało zmierzone jest cewka (zdjęcie)



Rysunek 3.9: Zależność napięcia wyjściowego od napięcia generatora dla solenoidu.



Rysunek 3.10: Źródło pola

3.6.11 Funkcja przynależności napięcia wyjściowego

Dla sygnału sinusoidalnego o częstotliwości $f=10\text{kHz}$ i wartości skutecznej ok 395mV uzyskano napięcie ok $1,808\text{V}$.

Zróbmy teraz zestawienie podejścia rozmytego i klasycznego (opartego na klasycznym prawdopodobieństwie).

3.6.12 Błąd pomiaru pola

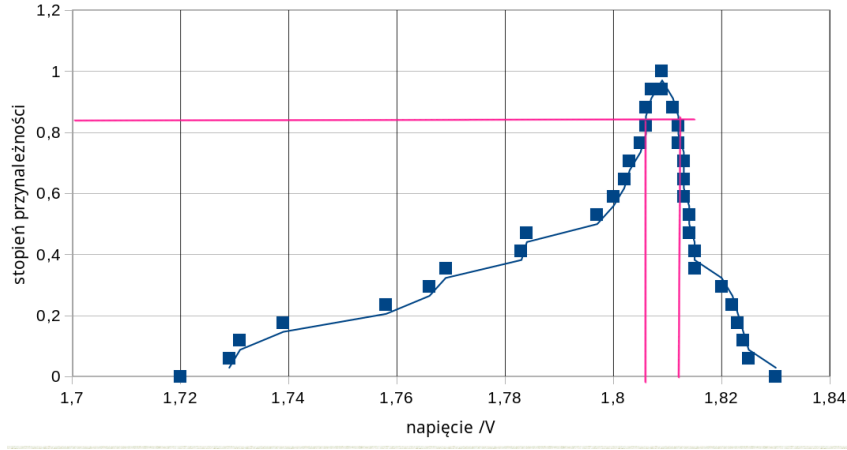
Wektor indukcji magnetycznej to:

$$B = \frac{\beta}{a} U_2 \quad (3.53)$$

gdzie a to współczynnik w równaniu $U_2 = aU_g + \Delta U_2$.

Czynnik ΔU_2 wstawimy w błąd a : $\Delta a_n = a \frac{\Delta U_2}{U_2}$,

3.6. ANALIZA NIEPEWNOŚCI METODĄ ZBIORÓW ROZMYTYCH NA PRZYKŁADZIE POMIARU ZMIENNEGO POŁA MAGNETYCZNEGO [52]



Rysunek 3.11: Funkcja przynależności serii pomiaru napięcia skutecznego wyjściowego. Mediana - 1,808V, na poziomie przynależności $\alpha' = 0,83$ przekrój wynosi [1,806, 1,812] gdzie $\alpha' = t^{-1}\left(\frac{t(\alpha)}{N}\right)$ dla $\alpha = 0,05$ $\alpha' = 0,83$ dla T normy Yagera.

fuzzy	probabilistic
Mediana - 1,808V	średnia arytmetyczna $U_{AV} = 1,797V$
T-norma Yagera	niezależność ciągu danych
poziom istotności $\alpha = 0,05$ jakie uzasadnienie spoglądamy w sufit	poziom ufności $p = 0,95$ jakie uzasadnienie spoglądamy w sufit
Niepewność rozmyta	odchylenie standardowe średniej
$\Delta U = 0,00300V$	$\sigma(U) = 0,0049V$
niepewność względna	odchylenie względne
$\frac{\Delta U}{u} = 0,00166$	$\frac{\sigma(U)}{U_{AV}} = 0,00274$

natomiast błąd względny to $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_r}{a} + \frac{\Delta a_n}{a}$, gdzie Δa_r - błąd statystyczny nachylenia metoda najmniejszych kwadratów: nachylenie $a = 6.805$ odchylenie standardowe $\sigma(a) = 0,0809$.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2\sigma(a)}{a} + \frac{\Delta a_n}{a} = \frac{2\sigma(a)}{a} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \quad (3.54)$$

β - współczynnik w: $B = \beta U_G$, gdzie: $\beta = \mu_0 \frac{n_0}{\sqrt{(\omega L_0)^2 + R_L^2}} = \mu_0 \frac{n_0}{Z}$

Błąd pola:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \beta}{\beta} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \quad (3.55)$$

3.6.13 Obliczenia niepewności rozmytej

Błąd pola:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \beta}{\beta} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \quad (3.56)$$

składowa β

$$\begin{aligned}\frac{\Delta Z}{Z} &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,01mH}{1,10mH} = 0,01 \\ \frac{\Delta n_0}{n_0} &= \frac{\Delta l_0}{l_0} = \frac{1mm}{245} = 0,004 \\ \frac{\Delta B_n}{B} &= 0,01\end{aligned}$$

Niepewność rozmyta

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = 6 \cdot 10^{-3} \quad (3.57)$$

niepewność standardowa $\frac{u(\beta)}{\beta} = 2,2 \cdot 10^{-3}$

3.6.14 Obliczenia niepewności rozmytej – błąd nachylenia a

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2\sigma(a)}{a} + \frac{\Delta a_n}{a} = \frac{2\sigma(a)}{a} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \quad (3.58)$$

$$\frac{2\sigma(a)}{a} = \frac{2 \cdot 0,0809}{6,895} = 0,024 = 24 \cdot 10^{-3} \quad (3.59)$$

$$\frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{2,98}{1808} = 1,67 \cdot 10^{-3} \quad (3.60)$$

O niepewności współczynnika nachylenia a decyduje metoda najmniejszych kwadratów

$$\frac{\Delta a}{a} = 24 \cdot 10^{-3} \quad (3.61)$$

Metoda GUM daje ten sam wynik dla niepewności rozszerzonej.

3.6.15 Niepewność pomiaru napięcia wyjściowego

Na niepewność pomiaru napięcia składania dwa czynniki

1. danych pomiarowych opisany funkcją przynależności, niepewność wynika z przekroju na poziomie $\alpha' = 0,82$

$$\frac{\Delta U_2}{U_2} = 17 \cdot 10^{-3}$$

2. błędy przyrządu - oscyloskopu DS-1250C 250MHz: $\frac{\Delta U_2}{U_2} = 4 \cdot 10^{-3}$

1. metoda zbiorów rozmytych: $\frac{\Delta U_2}{U_2} = 5,7 \cdot 10^{-3}$
2. metoda probabilistyczna $\frac{u(U_2)}{U_2} = 6,3 \cdot 10^{-3}$

3.6.16 Wynik końcowy pomiaru wektora indukcji magnetycznej

Wektor indukcji magnetycznej:

$$B = \frac{\beta}{a} U_2 \quad (3.62)$$

błąd:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \beta}{\beta} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \quad (3.63)$$

1. metoda zbiorów rozmytych $B = 9,22 \cdot 10^{-3} T$,
niepewność rozmyta względna $\frac{\Delta B}{B} = 36 \cdot 10^{-3}$
2. metoda probabilistyczna: $B = 9,16 \cdot 10^{-3} T$,
niepewność względna $\frac{u(B)}{B} = 41 \cdot 10^{-3}$

3.7 Wnioski

Metoda przedstawiona do obliczania niepewności rozszerzonej przy użyciu zbiorów rozmytych opiera się na określeniu α -przekroju zbioru rozmytego reprezentującego serię danych. Łączna niepewność jest równa arytmetycznej sumie niepewności uzyskanych metodą A i metodą B. Taki wynik można również uzasadnić w modelu probabilistycznym, jeżeli błąd systematyczny jest opisany za pomocą serii identycznych, silnie skorelowanych danych. Wyprowadzenie powyższych formuł można znaleźć w monografii [42], bardziej kompletne uzasadnienie i wyjaśnienie wymaga jeszcze kilku prac do opublikowania.

Rozdział 4

α -przekroje sumy zbiorów rozmytych typu $L - R$.

Wyznaczenie sumy i różnicy zbiorów rozmytych jest niezbędne do wyznaczania niepewności złożonej. Matematyczne podstawy przedstawia poniższy rozdział.

Ten rozdział oparty jest na wynikach uzyskanych wspólnie z prof. Michałem Urbaniskim oraz dr Pawłem Wójcickim ([47]). Celem tego rozdziału jest sformułowanie i udowodnienie twierdzenia, pozwalającego na znalezienie α -przekroju obrazu funkcji ciągłej dwóch zmiennych, ściśle rosnącej ze względu na obydwa argumenty, dla argumentów będących zbiorami typu $L - R$, przy zadanej t -normie. W szczególności, dla $f(x, y) = x + y$ otrzymujemy wzór na α -przekrój sumy dwóch (i zatem skończenie wielu, na mocy indukcji matematycznej) zbiorów rozmytych. Jak się okazuje, taki α -przekrój jest w postaci odpowiednio wyznaczonego przedziału, którego końce są związane z określoną t -normą. Otrzymane przez nas wzory wydają się być ważne z obliczeniowego punktu widzenia, ponieważ w myśl Twierdzenia NFK (skrót od Twierdzenie Nguyen-Fullér-Keresztfalvi ([4, Tw. 6], także [17])) α -przekrój np. sumy dwóch zbiorów rozmytych jest dany jako nieskończona suma mnogościowa z odpowiednio dobranymi zbiorami. W praktyce może to być trudne do znalezienia w postaci jawnej. Używając tych wzorów zadanie wydaje się być prostsze, bo sprowadzamy problem do znalezienia wartości najmniejszej i największej odpowiednio dobranych funkcji po odpowiednich zbiorach.

Dla uproszczenia, rozważamy wprawdzie przypadek funkcji sumy $f(x, y) = x + y$. Jest to w pewnym sensie uzupełnienie rozważań do prac dostępnych w tej literaturze: m.in. [7, 11, 17, 21, 28, 29]. Następnie przeprowadzamy dowód w przypadku ogólnym.

4.1 Notacja i niezbędne definicje

Definicja 4.1. Zbiór rozmyty A jest nazywany zbiorem typu $L - R$ (przedziałem rozmytym $L - R$), gdy odpowiadająca mu funkcja przynależności dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest postaci:

$$A(x) = \begin{cases} L(m - x) & \text{gdy } x < m \\ 1 & \text{gdy } x \in [m, M] \\ R(x - M) & \text{gdy } x > M \end{cases}$$

gdzie $0 \leq m \leq M$ oraz $L(\cdot), R(\cdot)$ są funkcjami ciągłymi, nierosnącymi z $\mathbb{R}_+$ (liczby rzeczywiste nieujemne) w $[0, 1]$, na $(0, 1]$, ściśle rosnącymi na swoich nośnikach (oznaczanych przez $\text{supp } L$ i $\text{supp } R$ odpowiednio), z warunkiem $L(0) = 1 = R(0)$. Dodatkowo, te funkcje są na $[0, 1]$ gdy ich nośniki są zwarte.

Nazywamy je funkcjami zboczy. Dla uproszczenia, zbiór A typu $L - R$ jak w definicji powyżej oznaczamy przez $A = (m, M, L, R)$. W szczególnym przypadku, gdy funkcja przynależności $A(x)$ ma zwarty nośnik oraz $m = M$ to $A(x)$ nazywane jest liczbą rozmytą $L - R$ ([10]).

4.2 Rozkład zbioru rozmytego na składowe

Każdy przedział rozmyty może być przedstawiony w postaci sumy (w arytmetyce opartej na t-normach) liczby rozmytej (o punktowym rdzeniu (tzn. jądrze)) i funkcji charakterystycznej rdzenia przesuniętego o dowolną wartość.

Niech $\bar{A}$ będzie przedziałem rozmytym $L-R$, o zboczach $L(x)$ i $R(x)$ i rdzeniu (tzn. jądrze) $[m_1, m_2]$. Dla każdej liczby rzeczywistej $m \in \mathbb{R}$ i każdej t-normy archimedeyjskiej:

$$\bar{A} = (m_1, m_2, L, R) = (m, m, L, R) \oplus_T (m_1 - m, m_2 - m, 0, 0) \quad (4.1)$$

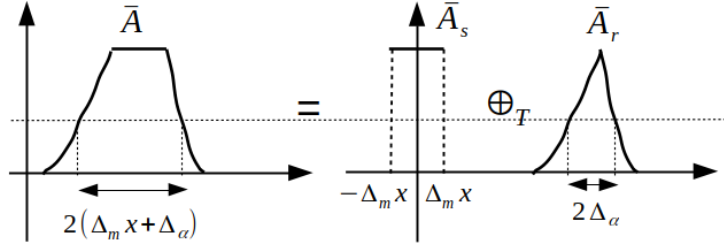
Rozkład ten nie zależy od t-normy (zachodzi też dla t-normy min), bowiem dodawanie funkcji charakterystycznej przedziału domkniętego do liczby rozmytej nie zależy od t-normy.

Zakładamy, że można wyróżnić dwie składowe błędów: systematyczne i niesystematyczne:

$$\Delta X = \Delta_r X + \Delta_s X$$

W języku zbiorów rozmytych zapiszemy to jako składanie (dodawanie) zbiorów rozmytych $\bar{A}_r$ i $\bar{A}_s$, gdzie: A_r składowa niesystematyczna oraz A_s składowa systematyczna opisana funkcją charakterystyczną przedziału $[-\Delta_m x, +\Delta_m x]$, gdzie $\Delta_m x$ to największy błąd dopuszczalny. Zatem

$$\bar{A} = \bar{A}_r \oplus_T \bar{A}_s,$$



Niepewność liczymy według wzoru:

$$U(A) = U(A_r \oplus_T A_s) = U(A_r) + U(A_s).$$

Rozkład przedziału rozmytego można zapisać w postaci wygodnej do interpretacji metrologicznej:

$$\bar{A} = (m_1, m_2, L, R) = \bar{m}_0 \oplus_T (-\Delta m, \Delta m, 0, 0) \oplus_T (0, 0, L, R), \quad (4.2)$$

gdzie $\bar{m}_0 = (m_0, m_0, 0, 0)$ jest funkcją charakterystyczną środka rdzenia $\bar{A}$ (punktowa liczba rozmyta), tzn.

$$m_0 = \text{Mid}(\text{Ker}(\bar{A})) = \frac{m_2 + m_1}{2},$$

(ogólnie $\text{Mid}(I)$ jest środkiem przedziału I).

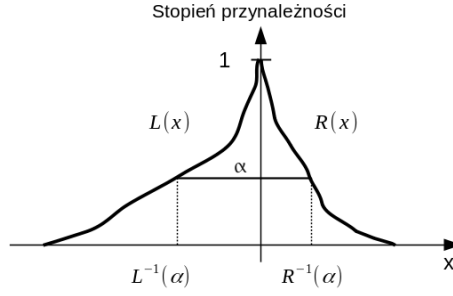
Wartość m_0 można interpretować jako estymator wartości wielkości mierzonej opisanej przedziałem rozmytym $\bar{A}$.

Przedział $(-\Delta m, \Delta m, 0, 0)$ opisuje błędy systematyczne, gdzie wielkość

$$\Delta m = \text{Rad}(\text{Ker}(\bar{A})) = \frac{m_2 - m_1}{2}$$

jest promieniem rdzenia $\bar{A}$ i określa maksymalny błąd systematyczny ($\text{Rad}(I)$ jest promieniem przedziału I).

Przedział $\bar{A}_r = (0, 0, L, R)$ opisuje błędy niesystematyczne, których rozkład możliwości zadany jest przez funkcje zboczy L i R .



Przekrój $[\bar{A}_r]^\alpha$ można zapisać za pomocą funkcji odwrotnych zboczy L^{-1} i R^{-1} :

$$[(0, 0, L, R)]^\alpha = [L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)] \quad (4.3)$$

Zatem przekrój $\bar{A}$ ma postać:

$$[\bar{A}]^\alpha = m_0 \oplus [-\Delta m, \Delta m] \oplus [L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)]. \quad (4.4)$$

4.3 Wyniki pomocnicze

W tym podrozdziale udowodnimy, że α -przekrój dwóch zbiorów rozmytych typu $L - R$ może być zapisany jako jeden przedział, którego końce są wyznaczone przez minimum oraz maksimum specjalnie dobranych funkcji, przy zadanej t -norm T .

Założmy, że T jest ciągłą t -normą i niech A_1 oraz A_2 będą dwoma zbiorami typu $L - R$. Według znanej Zasady Rozszerzeń Zadeha ([56]) zachodzi

$$(A_1 \oplus_T A_2)(z) = \sup(T(A_1(x), A_2(y)); x + y = z),$$

dla każdego $z \in \mathbb{R}$. Zakładamy, że dla każdego ustalonego $z \in \mathbb{R}$ istnieje punkt (tzn. para) (x_0, y_0) taka, że $x_0 + y_0 = z$ oraz

$$\sup(T(A_1(x), A_2(y)); x + y = z) = T(A_1(x_0), A_2(y_0)).$$

Jest to automatycznie spełnione w przypadku, gdy zarówno A_1 jak i A_2 mają zwarte nośniki, tzn. gdy ich funkcje zboczy mają zwarte nośniki. Wtedy obrazem $A_1 \times A_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]^2$ jest $[0, 1]^2$, czyli zbiór zwarty, zatem z ciągłości funkcja T przyjmuje swoją wartość największą.

W celu udowodnienia, że α -przekrój od sumy dwóch zbiorów typu $L-R$ da się zapisać jako jeden przedział, będziemy potrzebować poniższych lematów.

Lemat 4.2. Dla dowolnego zbioru typu $L-R$ postaci $A = (m, M, L, R)$ odpowiadający mu α -przekrój to

$$[A]^\alpha = [m - L^{-1}(\alpha), M + R^{-1}(\alpha)].$$

Dowód.

$$\begin{aligned} [A]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R}; A(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x < m; L(m-x) \geq \alpha\} \cup \{x \in [m, M]; 1 \geq \alpha\} \\ &\quad \cup \{x > M; R(x-M) \geq \alpha\} \\ &= [m - L^{-1}(\alpha), m) \cup [m, M] \cup (M, M + R^{-1}(\alpha)] \\ &= [m - L^{-1}(\alpha), M + R^{-1}(\alpha)]. \end{aligned}$$

□

Potrzebujemy także:

Lemat 4.3. Dla dowolnych dwóch zbiorów typu $L-R$ postaci $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$, $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$, α -przekrój ich sumy to

$$[A_1 \oplus_T A_2]^\alpha = \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} [m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta), M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)].$$

Dowód. Uogólnienie Twierdzenia Nguyen-Fullér-Keresztfalvi ([4, Tw. 6], także [17]) dla funkcji $f(x, y) = x + y$, łącznie z poprzednim lematem daje, że

$$\begin{aligned} [A_1 \oplus_T A_2]^\alpha &= \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} [A_1]^\xi + [A_2]^\eta \\ &= \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} [m_1 - L_1^{-1}(\xi), M_1 + R_1^{-1}(\xi)] + [m_2 - L_2^{-1}(\eta), M_2 + R_2^{-1}(\eta)] \\ &= \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} [m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta), M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)]. \end{aligned}$$

□

Teraz udowodnimy, że suma po prawej stronie równości powyżej może być zapisana w postaci domkniętego przedziału. Zachodzi następujące:

Twierdzenie 4.3.1. Dla dowolnych dwóch zbiorów $L - R$ postaci $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$ oraz $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$, przy ustalonej t -normie, α -przekrój sumy tych zbiorów da się zapisać jako

$$[A_1 \oplus_T A_2]^\alpha = \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} (m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta)), \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} (M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)) \right].$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia:

$$H(\xi, \eta) := m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta)$$

$$G(\xi, \eta) := M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)$$

Z Lematu 4.3 wynika

$$[A_1 \oplus_T A_2]^\alpha = \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} [H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)].$$

Chcemy wpięrow pokazać, że zbiór po lewej stronie równania z tezy, zawiera się w tym po prawej. Niech $x \in [A_1 \oplus_T A_2]^\alpha$. Wtedy istnieje punkt $(\xi, \eta) \in (0, 1]^2$, gdzie $T(\xi, \eta) \geq \alpha$ taki, że

$$x \in [H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)] \subseteq \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} H(\xi, \eta), \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} G(\xi, \eta) \right]$$

(ostatnie zawieranie wprost wynika z definicji funkcji min oraz max). I odwrotnie, niech x należy do prawej strony równania z tezy. Z ciągłości funkcji T , zbiór

$$\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\} = T^{-1}([\alpha, 1])$$

jest domknięty i ograniczony, a więc zwarty. Ponieważ funkcje H oraz G są ciągłe, istnieją punkty (ξ_0, η_0) oraz (ξ_1, η_1) w zbiorze $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$ takie, że

$$H(\xi_0, \eta_0) = \min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} H(\xi, \eta)$$

oraz

$$G(\xi_1, \eta_1) = \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} G(\xi, \eta).$$

Użyjemy teraz następującego Lematu:

Lemat 4.4. Dla każdych dwóch par punktów (a, b) oraz (c, d) w $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$ zachodzi

$$H(a, b) \leq G(c, d).$$

Powyższa nierówność implikuje

$$\begin{aligned} x \in [H(\xi_0, \eta_0), G(\xi_1, \eta_1)] &\subset [H(\xi_0, \eta_0), G(\xi_0, \eta_0)] \cup [H(\xi_1, \eta_1), G(\xi_1, \eta_1)] \\ &\subset [A_1 \oplus_T A_2]^\alpha. \end{aligned}$$

Wystarczy udowodnić Lemat 4.4.

Dowód Lematu. Rozważmy (a, b) oraz (c, d) jak w Lemacie. Wtedy

$$H(a, b) \leq G(c, d) \iff m_1 + m_2 - L_1^{-1}(a) - L_2^{-1}(b) \leq M_1 + M_2 + R_1^{-1}(c) + R_2^{-1}(d)$$

co jest prawdą, ponieważ

$$M_1 - m_1 + M_2 - m_2 + R_1^{-1}(c) + R_2^{-1}(d) + L_1^{-1}(a) + L_2^{-1}(b)$$

jest nieujemna. □

To kończy dowód Twierdzenia 4.3.1. □

4.3.1 Położenie punktów ekstremalnych

Oznaczmy

$$H(\xi, \eta) := m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta)$$

$$G(\xi, \eta) := M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)$$

Ponieważ t -norma T jest ciągła, zbiór

$$\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\} = T^{-1}([\alpha, 1])$$

jest zwarty. Zatem $H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)$ osiągają ekstrema: minimum oraz maksimum na tym zbiorze. Z drugiej strony, monotoniczność L_1, L_2, R_1, R_2 implikuje, że ekstrema nie należą do wnętrza zbioru $T^{-1}([\alpha, 1])$, ale do jego topologicznego brzegu:

$$\partial\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}.$$

Lemat 4.5. Zachodzi

$$\partial\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\} = \{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) = \alpha\}.$$

Dowód. Z definicji topologicznego brzegu, i z domkniętości zbioru $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$ wynika, że wystarczy pokazać, że wnętrze zbioru

$$\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$$

to

$$\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) > \alpha\}.$$

Założmy nie wprost, że istnieje punkt (ξ, η) we wnętrzu taki, że $T(\xi, \eta) = \alpha$. Skoro wnętrze zbioru jest zbiorem otwartym (z samej definicji), istnieje $\epsilon > 0$ taki, że koło $D((\xi, \eta), \epsilon)$ należy do wnętrza. Zatem istnieje punkt we wnętrzu zbioru (ξ_1, η) , gdzie $\xi_1 < \xi$, taki, że $T(\xi_1, \eta) < \alpha$. Nie jest to możliwe, bo $T(\xi_1, \eta) \geq \alpha$. Zatem wnętrze zadane jest jako

$$\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) > \alpha\},$$

co kończy dowód Lematu 4.5. □

Możemy teraz przejść do definicji głównego twierdzenia w tym rozdziale.

Twierdzenie 4.3.2. Dla każdych dwóch zbiorów $L - R$ postaci $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$ oraz $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$ α -przekrój ich sumy może być zapisany jako

$$[A_1 \oplus_T A_2]^\alpha = \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) = \alpha}} (m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta)), \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) = \alpha}} (M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)) \right].$$

Dowód. Zgodnie z Twierdzeniem 4.3.1 wystarczy udowodnić, że wartości największa i najmniejsza mogą być rozważane na zbiorze $T^{-1}(\alpha)$. Jak wynika z podrozdziału 4.3.1 wszystkie punkty ekstremalne muszą leżeć na brzegu zbioru $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$. Lemat 4.5 implikuje, że brzeg to $T^{-1}(\alpha)$, co kończy dowód. $\square$

Przykład 4.6. Rozważmy tzw. t -normę Łukasiewicza $T(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$. Rozważmy dwa zbiory $L - R$ postaci: $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1), A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$ gdzie

$$L_1(x) = 1 - \frac{x}{m_1 - a_1}, \quad R_1(x) = 1 - \frac{x}{b_1 - M_1}$$

oraz

$$L_2(x) = 1 - \frac{x}{m_2 - a_2}, \quad R_2(x) = 1 - \frac{x}{b_2 - M_2},$$

dla pewnych a_1, a_2, b_1, b_2 gdzie $a_1 < m_1 < M_1 < b_1 < a_2 < m_2 < M_2 < b_2$. Niech ponadto $m_1 - a_1 \geq m_2 - a_2$ oraz $b_1 - M_1 \geq b_2 - M_2$. Wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} & [A_1 \oplus_T A_2]^\alpha \\ &= \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) = \alpha}} (m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\eta)), \right. \\ & \quad \left. \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) = \alpha}} (M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\eta)) \right] \\ &= \left[\min_{\xi \in [\alpha, 1]} (m_1 + m_2 - L_1^{-1}(\xi) - L_2^{-1}(\alpha + 1 - \xi)), \right. \\ & \quad \left. \max_{\xi \in [\alpha, 1]} (M_1 + M_2 + R_1^{-1}(\xi) + R_2^{-1}(\alpha + 1 - \xi)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\min_{\xi \in [\alpha, 1]} (m_1 + m_2 - (1 - \xi)(m_1 - a_1) - (1 - (\alpha + 1 - \xi))(m_2 - a_2)), \right. \\
 &\quad \left. \max_{\xi \in [\alpha, 1]} (M_1 + M_2 + (1 - \xi)(b_1 - M_1) + (1 - (\alpha + 1 - \xi))(b_2 - M_2)) \right] \\
 &= \left[\min_{\xi \in [\alpha, 1]} (m_1 + m_2 - (1 - \xi)(m_1 - a_1) + (\alpha - \xi)(m_2 - a_2)), \right. \\
 &\quad \left. \max_{\xi \in [\alpha, 1]} (M_1 + M_2 + (1 - \xi)(b_1 - M_1) - (\alpha - \xi)(b_2 - M_2)) \right] \\
 &= [m_1 + m_2 - (1 - \alpha)(m_1 - a_1), M_1 + M_2 - (\alpha - 1)(b_2 - M_2)].
 \end{aligned}$$

Przykład 4.7. Rozważmy t -normę produktową $T(x, y) = xy$. Rozważmy dwa zbiory $L - R$ postaci: $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$, $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$ gdzie

$$L_1(x) = 1 - \frac{x}{m_1 - a_1}, R_1(x) = 1 - \frac{x}{b_1 - M_1}$$

oraz

$$L_2(x) = 1 - \frac{x}{m_2 - a_2}, R_2(x) = 1 - \frac{x}{b_2 - M_2},$$

dla pewnych a_1, a_2, b_1, b_2 gdzie $a_1 < m_1 < M_1 < b_1 < a_2 < m_2 < M_2 < b_2$. Załóżmy ponadto, że $m_1 - a_1 \geq m_2 - a_2$ oraz $b_1 - M_1 \geq b_2 - M_2$. Wtedy TU PODAĆ WYNIK I ZACYTOWAĆ PRACĘ TURKA

4.4 Twierdzenie główne

W tym rozdziale pokażemy, że Twierdzenie 4.3.2 jest prawdziwe także w przypadku ogólnym. Uogólnienie polega na zastąpieniu sumy zbiorów przez dowolną funkcję rosnącą ze względu na swoje obydwa argumenty. Takie funkcje są także rozważane np. w pracy [9].

Niech T będzie ciągłą t -normą i niech A_1 oraz A_2 będą dwoma zbiorami $L - R$. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zdefiniujmy zbiór rozmyty dany przez $f^{(T)}(A_1, A_2)$:

$$(f^{(T)}(A_1, A_2))(z) = \sup(T(A_1(x), A_2(y)); z = f(x, y)).$$

Założmy jak poprzednio, że dla każdego ustalonego z istnieje punkt (x_0, y_0) , $f(x_0, y_0) =$

z dla którego $\sup(T(A_1(x), A_2(y)); f(x, y) = z) = T(A_1(x_0), A_2(y_0))$. To założenie jest automatycznie spełnione w przypadku, gdy A_1 oraz A_2 mają zwarte nośniki, zatem jeśli ich funkcje zboczy mają zwarte nośniki oraz funkcja f jest ciągła. Istotnie, $f(x, y) = z$ oznacza $(x, y) \in f^{-1}(z)$. Zauważmy, że x przyjmuje wartości rzeczywiste oraz $y \in \text{supp } A_2 \cap \{y; (-x, y) \in f^{-1}(z), \text{ oraz } x \in \mathbb{R}\}$, i zbiór $\text{supp } A_2 \cap \{y; (x, y) \in f^{-1}(z), \text{ oraz } x \in \mathbb{R}\}$ jest zwarty, ponieważ jest ograniczony (bo nośnik A_2 taki jest) oraz domknięty. Domkniętość wynika z faktu, że rozważając dowolny ciąg $y_n \in \text{supp } A_2 \cap \{y; (x, y) \in f^{-1}(z), \text{ oraz } x \in \mathbb{R}\}$ zbieżny do y_0 , więc $y_n \rightarrow y_0$ mamy, że y_0 należy do $\text{supp } A_2$ (ze zwartości) oraz

$$f(x, y_0) = f(x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x, y_n)}_z = z,$$

więc $(x, y_0) \in f^{-1}(z)$ (użyliśmy ciągłości funkcji f). A zatem

$$\begin{aligned} & \{(A_1(x), A_2(y)); z = f(x, y)\} \\ &= [0, 1] \times A_2(\{\text{supp } A_2 \cap \{y; (x, y) \in f^{-1}(z), \text{ oraz } x \in \mathbb{R}\}\}). \end{aligned}$$

Ponadto $A_2(\{\text{supp } A_2 \cap \{y; (x, y) \in f^{-1}(z), \text{ oraz } x \in \mathbb{R}\}\})$ jest zwarty bo funkcja A_2 jest ciągła oraz zbiór $\{\text{supp } A_2 \cap \{y; (x, y) \in f^{-1}(z), \text{ oraz } x \in \mathbb{R}\}\}$ jest zwarty. Ostatecznie, ciągłość T implikuje, że T osiąga wartość największą i najmniejszą.

W celu zapisania α -przekroju zbioru $f^{(T)}(A_1, A_2)$ jako jednego przedziału potrzebujemy także poniższego lematu.

Lemat 4.8. Dla każdych dwóch zbiorów typu $L - R$ postaci $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$, $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$ oraz funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\begin{aligned} & [f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha \\ &= \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} f([m_1 - L_1^{-1}(\xi), M_1 + R_1^{-1}(\xi)], [m_2 - L_2^{-1}(\eta), M_2 + R_2^{-1}(\eta)]) \end{aligned}$$

Dowód. Uogólnienie Twierdzenia Nguyen-Fullér-Keresztfalvi T ([4, Tw. 6]) oraz Lemat

4.2 implikują, że

$$\begin{aligned} [f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha &= \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} f([A_1]^\xi, [A_2]^\eta) \\ &= \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} f([m_1 - L_1^{-1}(\xi), M_1 + R_1^{-1}(\xi)], [m_2 - L_2^{-1}(\eta), M_2 + R_2^{-1}(\eta)]). \end{aligned}$$

□

Teraz możemy udowodnić następujące:

Twierdzenie 4.4.1. Dla każdych dwóch zbiorów $L - R$ postaci $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$ oraz $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$ i funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ściśle rosnącej ze względu na obydwaj argumenty zachodzi

$$\begin{aligned} [f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha &= \\ &= \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} f(m_1 - L_1^{-1}(\xi), m_2 - L_2^{-1}(\eta)), \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} f(M_1 + R_1^{-1}(\xi), M_2 + R_2^{-1}(\eta)) \right]. \end{aligned}$$

Dowód. Oznaczmy

$$H(\xi, \eta) := f(m_1 - L_1^{-1}(\xi), m_2 - L_2^{-1}(\eta))$$

$$G(\xi, \eta) := f(M_1 + R_1^{-1}(\xi), M_2 + R_2^{-1}(\eta))$$

$$K(\xi, \eta) := f([m_1 - L_1^{-1}(\xi), M_1 + R_1^{-1}(\xi)], [m_2 - L_2^{-1}(\eta), M_2 + R_2^{-1}(\eta)])$$

Z poprzedniego lematu mamy, że

$$[f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha = \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0,1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} K(\xi, \eta).$$

Zauważamy wpierw, że prawdziwy jest także

Lemat 4.9. $K(\xi, \eta) = [H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)]$

Dowód Lematu. Jeśli jakiś element p należy do prawej strony tezy, to dla pewnej pary (ξ, η) zachodzi

$$f(m_1 - L_1^{-1}(\xi), m_2 - L_2^{-1}(\eta)) \leq p \leq f(M_1 + R_1^{-1}(\xi), M_2 + R_2^{-1}(\eta)).$$

Ciągłość funkcji f daje, że $p = f(a, b)$ dla pewnej pary (a, b) , gdzie

$$m_1 - L_1^{-1}(\xi) \leq a \leq M_1 + R_1^{-1}(\xi),$$

oraz

$$m_2 - L_2^{-1}(\eta) \leq b \leq M_2 + R_2^{-1}(\eta)$$

(oszacowanie na a i b wynika z monotoniczności f ze względu na obydwa argumenty). Ale to oznacza, że $p \in K(\xi, \eta)$.

I odwrotnie, gdy $p \in K(\xi, \eta)$, to istnieje para $(a, b) \in [m_1 - L_1^{-1}(\xi), M_1 + R_1^{-1}(\xi)] \times [m_2 - L_2^{-1}(\eta), M_2 + R_2^{-1}(\eta)]$ gdzie $f(a, b) = p$. Skoro f jest rosnąca ze względu na obydwa argumenty, zachodzi

$$f(m_1 - L_1^{-1}(\xi), m_2 - L_2^{-1}(\eta)) \leq p = f(a, b) \leq f(M_1 + R_1^{-1}(\xi), M_2 + R_2^{-1}(\eta)),$$

więc $p \in [H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)]$. □

Reasumując

$$[f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha = \bigcup_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} [H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)].$$

Chcemy wpięrw pokazać, że lewa strona równości w równaniu w tezie 4.4.1 jest podzbiorem prawej strony. Rozważmy $p \in [f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha$. Istnieje para $(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha$ taka, że

$$p \in [H(\xi, \eta), G(\xi, \eta)] \subseteq \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} H(\xi, \eta), \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} G(\xi, \eta) \right]$$

(ostatnie zawieranie wynika wprost zdefinicji min oraz max).

I odwrotnie, gdy $x \in \text{Pstr}$ to z ciągłości funkcji T , zbiór

$$\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\} = T^{-1}([\alpha, 1])$$

jest domknięty i ograniczony, zatem zwarty. Z ciągłości funkcji H i G istnieją (ξ_0, η_0) oraz (ξ_1, η_1) in $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$ takie, że

$$H(\xi_0, \eta_0) = \min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} H(\xi, \eta)$$

i

$$G(\xi_1, \eta_1) = \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) \geq \alpha}} G(\xi, \eta).$$

Aby dookńczyć dowód musimy jeszcze udowodnić następujący lemat:

Lemat 4.10. Dla każdych dwóch par punktów (a, b) oraz (c, d) należących do $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$ zachodzi

$$H(a, b) \leq G(c, d).$$

Powyższe oszacowanie implikuje, że

$$\begin{aligned} x \in Pstr &= [H(\xi_0, \eta_0), G(\xi_1, \eta_1)] \subset [H(\xi_0, \eta_0), G(\xi_0, \eta_0)] \cup [H(\xi_1, \eta_1), G(\xi_1, \eta_1)] \\ &\subset Lstr. \end{aligned}$$

Udowodnijmy Lemat.

Dowód Lematu. Niech (a, b) i (c, d) będą jak w założeniach lematu. Wtedy

$$H(a, b) \leq G(c, d) \iff f(m_1 - L_1^{-1}(a), m_2 - L_2^{-1}(b)) \leq f(M_1 + R_1^{-1}(c), M_2 + R_2^{-1}(d)),$$

co wynika z monotoniczności funkcji f , ponieważ

$$\begin{aligned} f(\underbrace{m_1 - L_1^{-1}(a)}_{\leq m_1 \leq M_1}, m_2 - L_2^{-1}(b)) &\leq f(\underbrace{M_1 + R_1^{-1}(c)}_{\geq M_1}, \underbrace{m_2 - L_2^{-1}(b)}_{\leq m_2 \leq M_2}) \\ &\leq f(M_1 + R_1^{-1}(c), \underbrace{M_2 + R_2^{-1}(d)}_{\geq M_2}) \end{aligned}$$

□

To kończy dowód Twierdzenia 4.4.1.

□

Możemy teraz sformułować główne twierdzenie w tym artykule.

Twierdzenie 4.4.2. Dla każdych zbiorów rozmytych $L-R$ danych przez $A_1 = (m_1, M_1, L_1, R_1)$ oraz $A_2 = (m_2, M_2, L_2, R_2)$ i funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ściśle rosnącej ze względu na

każdy argument, zachodzi:

$$[f^{(T)}(A_1, A_2)]^\alpha = \left[\min_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) = \alpha}} f(m_1 - L_1^{-1}(\xi), m_2 - L_2^{-1}(\eta)), \max_{\substack{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2 \\ T(\xi, \eta) = \alpha}} f(M_1 + R_1^{-1}(\xi), M_2 + R_2^{-1}(\eta)) \right].$$

Dowód. Zgodnie z Twierdzeniem 4.4.1, wystarczy udowodnić, że min oraz max może być wyznaczone względem zbioru $T^{-1}(\alpha)$. Niech $H(\xi, \eta)$ oraz $G(\xi, \eta)$ będą zdefiniowane jak w dowodzie Twierdzenia 4.4.1. Wtedy

$$H(\xi_1, \eta_1) \leq H(\xi_2, \eta_2) \text{ dla } \xi_1 \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta_2.$$

Istotnie,

$$\xi_1 \leq \xi_2 \iff L_1^{-1}(\xi_1) \geq L_1^{-1}(\xi_2) \iff m_1 - L_1^{-1}(\xi_1) \leq m_1 - L_1^{-1}(\xi_2)$$

więc

$$\begin{aligned} f(m_1 - L_1^{-1}(\xi_1), m_2 - L_2^{-1}(\eta_1)) &\leq f(m_1 - L_1^{-1}(\xi_2), m_2 - L_2^{-1}(\eta_1)) \\ &\leq f(m_1 - L_1^{-1}(\xi_2), m_2 - L_2^{-1}(\eta_2)) \end{aligned}$$

Podobnie

$$G(\xi_1, \eta_1) \leq G(\xi_2, \eta_2) \text{ gdy } \xi_1 \geq \xi_2, \eta_1 \geq \eta_2.$$

Zatem zarówno G jak i H są funkcjami monotonicznymi.

Jak wynika z podrozdziału 4.3.1 wszystkie punkty ekstremalne muszą leżeć na brzegu zbioru $\{(\xi, \eta) \in (0, 1]^2, T(\xi, \eta) \geq \alpha\}$. Lemat 4.5 implikuje, że brzeg to $T^{-1}(\alpha)$, co kończy dowód. $\square$

Uwagi końcowe i dalsze kierunki badań

Uwaga 4.11. Można łatwo zauważyć, że główne Twierdzenia 4.4.2 może być zdefiniowane dla funkcji $f^{(T)}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_1, A_2, \dots, A_n$ są zbiorami rozmytymi typu $L - R$ oraz $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją n zmiennych, ściśle rosnącą ze względu na każdą zmienną z osobna.

Uwaga 4.12. H.-Ch.Wu wprowadził tzw. W -normę ([54]) która jest uogólnieniem pojęcia t -

normy. Przy pewnych założeniach na W (które spełniają t -normy rozważane w powyżej), lemat 4.3 może być zdefiniowany przy użyciu W -normy zamiast t -normy T (patrz [54, Tw. 5.3]). Z drugiej strony dowody powyżej są mocno oparte o ciągłość i monotoniczność funkcji zboczy i ciągłość t -normy T . Twierdzenie 4.4.2 może być sformułowane także przy użyciu W -normy zamiast t -normy T , przy dodatkowych założeniach, że 0-przekroje $[A_1]^0, [A_2]^0$ są zwarte (czego nie zakładaliśmy).

Uwaga 4.13. Wspólny rozkład możliwości zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ to funkcja $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gdzie

$$A_i(x_i) = \sup_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} C(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(patrz [16]). Każda norma trójkątna T generuje wspólny rozkład możliwości dla każdych n zbiorów rozmytych $A_1, A_2, \dots, A_n$, przez wzór

$$C_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)).$$

Nie zachodzi odwrotność tego (patrz rozdział 4 w [9]). Kolejnym krokiem byłoby udowodnienie Twierdzenia 4.4.1 z C zamiast normą T .

Rozdział 5

O pewnym porządku na zbiorach rozmytych indukowanym przez arytmetykę opartą na t -normie.

Ten rozdział oparty jest na wynikach uzyskanych wspólnie z prof. Michałem Urbańskim, Dominiką Krawczyk oraz dr Pawłem Wójcickim ([48]). Zajmiejmy się tu pewnym porządkiem na zbiorach rozmytych indukowanym przez arytmetykę opartą na t -normie. Relacja rozmyta na (niepustym) zbiorze X była po raz pierwszy zaproponowana przez Zadeha w pracy [57] jako zbiór rozmyty na iloczynie kartezjańskim $X \times X$. Następnie wiele osób zajmowało się rozwijaniem tej idei, np. w pracy [2] jest rozważany tzw. ścisły (ang. strict) porządek. Nawiążemy do tego jeszcze na końcu tego rozdziału.

Na potrzeby użycia w teorii pomiarów, definiujemy porządek rozmyty na zbiorach rozmytych (nad $\mathbb{R}$) $\prec_T^\alpha$ warunkiem

$$\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B} \iff [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha \subset \mathbb{R}_+ \text{ (liczby dodatnie rzeczywiste)}, \quad (5.1)$$

albo równoważnie $[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha > 0$, gdzie $\bar{A}$ oraz $\bar{B}$ są zbiorami rozmytymi, $[\bar{A}]^\alpha$ jest α -przekrojem zbioru rozmytego $\bar{A}$, $\ominus_T$ - odejmowaniem danym przez t -normę oraz $<$ jest porządkiem przedziałowym (tzn. gdy I oraz J są przedziałami, $I < J$ gdy $\{j - i; \quad j \in J, i \in I\} \subset (0, \infty)$).

Powyższą relację będziemy nazywać porządkiem rozmytym na zbiorach rozmytych indukowanym przez t -normę.

W teorii pomiarów porządek dany jest przez komparator, którego działanie polega na wyznaczeniu różnicy pomiędzy dwoma sygnałami na wejściu. W przypadku rozmytym rozważamy odejmowanie zbiorów rozmytych jako uogólnienie operacji odejmowania przedziałowego, tzn. zbiór rozmyty B jest większy niż zbiór rozmyty A , gdy $B - A$ (zdefiniowane przez t normę) jest dodatnie. W tym rozdziale opisujemy pewne własności (łącznie z ich definicją) tego porządku. Okazuje się, że porządek pomiędzy zbiorami rozmytymi, który rozważamy w pracy jest przeciwwrotny, przechodni, asymetryczny, zwarty, subhomotetyczny, Archimedowski i spełnia (wprowadzoną przez nas i opsianą) słabą własność Ferrersa. Sam porządek rozważany był już w [42], a własności, o których mówimy, nawiązują do podstawowych problemów teorii pomiarów.

5.1 Własności porządku rozmytego opartego $\prec_\alpha$

Zanim przejdziemy do opisywania własności, potrzebne nam będą (w tym rozdziale) pewne lematy pomocnicze.

Lemat 5.1. Dla każdej t -normy T i wszystkich $x, y \in [0, 1]$ zachodzi:

$$T(x, y) \leq T_{\min}(x, y) = \min(x, y).$$

Dowód. Niech $x, y \in [0, 1]$ i załóżmy, że $x \leq y$. Wtedy

$$T(x, y) \leq T(x, 1) = x = \min(x, y) = T_{\min}(x, y).$$

□

Twierdzenie 5.2. Niech $\bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, gdzie $\mathbb{F}$ jest rozdziną zbiorów rozmytych nad $\mathbb{R}$ (o wartościach rzeczywistoliczbowych), i niech T będzie półciągłą górną t -normą.

Wtedy dla każdego $\alpha \in (0, 1]$ relacja $\prec_T^\alpha$ jest:

- a) przeciwwrotna,
- b) przechodnia,
- c) asymetryczna
- d) zwarta ,

- e) spełnia tzw. słabą własność Ferrersa: gdy $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$ oraz $\bar{C} \prec_T^\alpha \bar{D}$ to $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{D}$ lub $\neg(\bar{B} \prec_T^\alpha \bar{C})$
 (więc $\bar{C} \prec_T^\alpha \bar{B}$ lub $\bar{B} \sim_T^\alpha \bar{C}$, gdzie $\bar{B} \sim_T^\alpha \bar{C} \Leftrightarrow \neg(\bar{B} \prec_T^\alpha \bar{C})$ i $\neg(\bar{C} \prec_T^\alpha \bar{B})$),
- f) Archimedejska: dla dowolnych $\bar{A}$ oraz $\bar{B}$ gdzie $\bar{B} \subset \mathbb{R}_+$ istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ taka, że $\bar{A} \prec_T^\alpha n.\bar{B}$,
- g) spełnia własność subhomotetyczności, tzn. [46]:

$$\bar{A} \prec_T^\alpha B \Rightarrow n.A \prec_T^\alpha n.\bar{B}$$

gdzie $n.K = \underbrace{K \oplus_T \dots \oplus_T K}_{n \text{ times}}$,

oraz $\oplus_T$ oznacza dodawanie zbiorów rozmytych:

$$(\bar{B} \oplus_T \bar{A})(z) = \{z \in \mathbb{R}; \sup_{z=y+x} \{T(A(x), B(y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \geq \alpha\} \quad (5.2)$$

Dowód. ad. 5.2)

Musimy pokazać, że zawsze zachodzi $\bar{A} \not\prec_T^\alpha \bar{A}$. Z twierdzenia NFK (patrz (1.11)) wynika, że

$$[\bar{A} \ominus_T \bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} \{y - x : x \in [\bar{A}]^p, y \in [\bar{A}]^q\}.$$

Dla każdego p, q zachodzi $[\bar{A}]^p \subset [\bar{A}]^q$ lub odwrotnie. Biorąc $w \in [\bar{A}]^p \cap [\bar{A}]^q$ dostajemy, że $w - w = 0 \in [\bar{A} \ominus_T \bar{A}]^\alpha$. Ostatecznie, nie zachodzi zawieranie $[\bar{A} \ominus_T \bar{A}]^\alpha \subset \mathbb{R}_+$, czyli $\bar{A} \not\prec_T^\alpha \bar{A}$.

ad. 5.2)

Założmy, że $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$ oraz $\bar{B} \prec_T^\alpha \bar{C}$. Chcemy pokazać, że $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{C}$. Z twierdzenia NFK wystarczy pokazać, że

$$[\bar{C} \ominus_T \bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} \{c - a : c \in [\bar{C}]^p, a \in [\bar{A}]^q\} \subset (0, \infty).$$

Udowodnijmy to nie wprost. Założmy, że dla pewnych $p_1, q_1 \in (0, 1]$, gdzie $T(p_1, q_1) \geq \alpha$ istnieją $c \in [\bar{C}]^{p_1}$ oraz $a \in [\bar{A}]^{q_1}$ takie, że $c - a \leq 0$. Niech $b \in [\bar{B}]^1$. Oszacowanie $\min(p_1, q_1) \geq T(p_1, q_1) \geq \alpha$ implikuje, że $p_1 \geq \alpha$ oraz $q_1 \geq \alpha$. Zatem $T(p_1, 1) = p_1 \geq \alpha$ i

podobnie $T(1, q_1) = q_1 \geq \alpha$. Ostatecznie

$$\underbrace{c - a}_{\leq 0} = \underbrace{c - b}_{> 0} + \underbrace{b - a}_{> 0}$$

Otrzymujemy sprzeczność!

ad. 5.2)

Niech $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$. Wybierzmy punkty p, q gdzie $T(p, q) \geq \alpha$ i dowolne punkty $y \in [\bar{B}]^p, x \in [\bar{A}]^q$. Wtedy $x - y = -(y - x) < 0$. Ponieważ $T(q, p) = T(p, q) \geq \alpha$, zachodzi

$$x - y \in [\bar{A} \ominus_T \bar{B}]^\alpha.$$

Wtedy nie możemy mieć $\bar{B} \prec_T^\alpha \bar{A}$.

ad. 5.2)

Niech $\bar{A} \approx_T^\alpha \bar{B}$. Zatem z samej definicji wynika, że $0 \notin [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha$. Czyli albo zachodzi $[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha > 0$, i wtedy $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$ albo $[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha < 0$, i wtedy $\bar{B} \prec_T^\alpha \bar{A}$.

ad. 5.2)

Założmy, że $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$ oraz $\bar{C} \prec_T^\alpha \bar{D}$. Z twierdzenia NFK mamy, że

$$0 < [\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} \{y - x : y \in [\bar{B}]^p, x \in [\bar{A}]^q\}.$$

Zauważmy, że to jest równoważne temu, że dla dowolnych p, q takich, że $T(p, q) \geq \alpha$, mamy, że „ $[\bar{A}]^q$ jest na lewo na osi X w stosunku do $[\bar{B}]^p$ ” (ponieważ $y - x$ jest zawsze dodatnie). Podobnie $\bar{C} \prec_T^\alpha \bar{D}$ implikuje, że dla każdych p, q , gdzie $T(p, q) \geq \alpha$ zachodzi, że „ $[\bar{C}]^q$ jest na lewo na osi X w stosunku do $[\bar{D}]^p$ ”.

Rozważmy możliwe trzy przypadki: $\bar{B} \prec_T^\alpha \bar{C}$ i wtedy z przechodniości mamy, że $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{D}$, or $\bar{C} \prec_T^\alpha \bar{B}$, or $\bar{B} \sim_T^\alpha \bar{C}$ (co daje tezę). Zauważmy, że wszystkie te trzy przypadki opisują pozycję zbioru $[\bar{C} \ominus_T \bar{B}]^\alpha$ na osi rzeczywistej OX . W szczególności, $\bar{B} \sim_T \bar{C}$ oznacza, że $0 \in [\bar{C} \ominus_T \bar{B}]^\alpha$.

ad. 5.2)

Będziemy jeszcze potrzebować następującego lematu

Lemat 5.3. Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej t -normy T , zachodzi

$$[n.\bar{A}]^\alpha \subseteq n[\bar{A}]^\alpha.$$

Co więcej, w przypadku $T = T_{\min}$ powyższe zawieranie staje się równością. W przypadku tzw. drastycznej t-normy nie zachodzi zawieranie odwrotne.

Dowód. Przeprowadzimy dowód w oparciu o Metodę Indukcji Matematycznej.

Zawieranie zachodzi dla $n = 1$. Załóżmy, że zawieranie zachodzi dla pewnego n_0 . Wtedy dla $n_0 + 1$ mamy

$$\begin{aligned} [(n_0 + 1).\bar{A}]^\alpha &= [\bar{A} \oplus_T \underbrace{\bar{A} \oplus_T \dots \oplus_T \bar{A}}_{n_0}]^\alpha \\ &= \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} \{x + y : x \in [\bar{A}]^p, y \in \underbrace{[\bar{A} \oplus_T \dots \oplus_T \bar{A}]^q}_{n_0}\}. \end{aligned}$$

Niech $z \in [(n_0 + 1).\bar{A}]^\alpha$. Istnieją $x_z \in [\bar{A}]^p$ oraz $y_z \in \underbrace{[\bar{A} \oplus_T \dots \oplus_T \bar{A}]^q}_{n_0}$ gdzie $p, q \in (0, 1]$, $T(p, q) \geq \alpha$ takie, że $z = x_z + y_z$. Z lematu 5.1 $\min(p, q) \geq T(p, q) \geq \alpha$, więc $p, q \geq \alpha$. Zatem $x_z \in [\bar{A}]^\alpha$ oraz $y_z \in [n_0.\bar{A}]^\alpha \subseteq n_0[\bar{A}]^\alpha$ (używamy tu założenia indukcyjnego oraz tego, że rodzina α -przekrojów jest zstępująca). Ostatecznie $z \in (n_0 + 1)[\bar{A}]^\alpha$.

Zauważmy, że odwrotne zawieranie z pewnością zachodzi dla t-normy $T_{\min}$. Istotnie, jest tak z pewnością dla $n = 1$. Załóżmy ponadto, że dla liczby naturalnej n_0 zachodzi $n_0[\bar{A}]^\alpha \subseteq [n_0.\bar{A}]^\alpha$. Weźmy $z \in (n_0 + 1)[\bar{A}]^\alpha$. Thus $z = (n_0 + 1)x = x + n_0x$, gdzie $x \in [\bar{A}]^\alpha$. So $n_0x \in n_0[\bar{A}]^\alpha \subseteq [n_0.\bar{A}]^\alpha$. Przypomnijmy, że

$$[(n_0 + 1).\bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) = \min(p,q) \geq \alpha\}} \{x + y : x \in [\bar{A}]^p, y \in [n_0.\bar{A}]^q\}. \quad (5.3)$$

W szczególności $p = q = \alpha \geq \alpha$, co daje $z \in (n_0 + 1)[\bar{A}]^\alpha$.

Drastyczna t -norma T jest zdefiniowana jako:

$$T_D(x, y) = \begin{cases} y & \text{if } x = 1 \\ x & \text{if } y = 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{aligned} [2.\bar{A}]^\alpha &= [\bar{A} \oplus \bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T_D(p,q) \geq \alpha\}} \{[\bar{A}]^p + [\bar{A}]^q\} \\ &= \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: p=1 \wedge q \in [\alpha,1] \text{ or } q=1 \wedge p \in [\alpha,1]\}} \{[\bar{A}]^p + [\bar{A}]^q\} \end{aligned}$$

Wnioskujemy z tego, że $2[\bar{A}]^\alpha = [\bar{A}]^\alpha + [\bar{A}]^\alpha$ nie zawiera się w $[2.\bar{A}]^\alpha$ dla żadnego $\alpha \in (0,1)$.

□

Proof of 5.2. Relacja $\bar{A} \prec_T^\alpha n.\bar{B}$ zachodzi, gdy $[n.\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha > 0$. Z twierdzenia NFK wynika, że (1.11)

$$\begin{aligned} [n.\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha &= \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} [n.\bar{B}]^p - [\bar{A}]^q \\ &\subset \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T_{\min}(p,q) \geq \alpha\}} [n.\bar{B}]^p - [\bar{A}]^q = [n.\bar{B} \ominus_{T_{\min}} \bar{A}]^\alpha \\ &\stackrel{(\star)}{=} [n.\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^\alpha \subset n[\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^\alpha, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie zawieranie wynika wprost z lematu 5.3. Ponieważ w przypadku przedziałów zawsze istnieje n takie, że: $n[\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^\alpha > 0$, wystarczy tylko udowodnić $(\star)$.

Dowód $(\star)$. Jest jasne, że $[n.\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^\alpha$ jest postaci $[n.\bar{B}]^p - [\bar{A}]^q$ dla $p = q = \alpha$. Wystarczy pokazać zawieranie odwrotne. Niech $(p, q) \in (0, 1]^2$ gdzie $T_{\min}(p, q) \geq \alpha$. Wtedy z samej definicji wynika, że $[n.\bar{B}]^p \subset [n.\bar{B}]^\alpha$ oraz $[\bar{A}]^q \subset [\bar{A}]^\alpha$. Zatem $-[\bar{A}]^q \subset -[\bar{A}]^\alpha$, tak więc

$$[n.\bar{B}]^p - [\bar{A}]^q \subset [n.\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^\alpha.$$

□

Zauważmy, że dowód $f)$ implikuje, że

Wniosek 5.4. Jeśli $[\bar{A}]^\alpha < [\bar{B}]^\alpha$, to $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$ lub równoważnie $[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha \subset \mathbb{R}_+$

□

□

ad. 5.2)

Założmy, że $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$, więc $[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha > 0$. Zatem $n[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha > 0$. Teraz musimy jeszcze udowodnić następujący:

Lemat 5.5. Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $[n.\bar{B} \ominus_T n.\bar{A}]^\alpha \subset n[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha$

Powyższy lemat automatycznie implikuje Twierdzenie. Aby udowodnić, że lemat jest prawdziwy pokażemy wpierw następujący

Lemat 5.6. Założmy, że dla pewnych $a, b, c, d, p, q \in (0, 1]$ zachodzi $T(a, b) \geq p, T(c, d) \geq q$ oraz $T(p, q) \geq \alpha$. Wtedy $T(a, c) \geq \alpha$ oraz $T(b, d) \geq \alpha$.

Dowód Lematu 5.6. Wystarczy użyć Lematu 5.1 i podstawowych własności t -normy. Istotnie,

$$T(a, c) = T(T(a, c), 1) \geq T(T(a, c), d) = T(a, \underbrace{T(c, d)}_{\geq q}) \geq T(a, q) \geq T(p, q) \geq \alpha.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} T(b, d) &= T(T(b, d), 1) \geq T(T(b, d), c) = T(b, T(d, c)) = T(b, \underbrace{T(c, d)}_{\geq q}) \\ &\geq T(b, q) \geq T(p, q) \geq \alpha. \end{aligned}$$

□

Wystarczy udowodnić Lemat 5.5

Dowód Lematu 5.5. Wykorzystamy tu Metodę Indukcji Matematycznej.

Z pewnością zawieranie zachodzi dla $n = 1$. Założmy, że zachodzi także dla jakiejś dodatniej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$. Tak więc $[n_0.\bar{B} \ominus_T n_0.\bar{A}]^\alpha \subset n_0[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha$. Dla $n_0 + 1$ zachodzi

$$\begin{aligned} &[(n_0 + 1).\bar{B} \ominus_T (n_0 + 1).\bar{A}]^\alpha \\ &= \bigcup_{\{(p, q) \in (0, 1]^2: T(p, q) \geq \alpha\}} \{x - y, \quad x \in [(n_0 + 1).\bar{B}]^p, y \in [(n_0 + 1).\bar{A}]^q\}. \end{aligned}$$

Niech $z \in [(n_0 + 1).\bar{B} \ominus_T (n_0 + 1).\bar{A}]^\alpha$. Wtedy $z = x_z - y_z$ dla pewnych $x_z \in [(n_0 + 1).\bar{B}]^p$ oraz $y_z \in [(n_0 + 1).\bar{A}]^q$, gdzie $p, q \in (0, 1]$ oraz $T(p, q) \geq \alpha$.

Ponadto

$$[(n_0 + 1) \cdot \bar{B}]^p = \bigcup_{\{(\tilde{p}, \tilde{q}) \in (0,1]^2: T(\tilde{p}, \tilde{q}) \geq p\}} \{c + d, \quad c \in [\bar{B}]^{\tilde{p}}, d \in [n_0 \cdot \bar{B}]^{\tilde{q}}\}.$$

A zatem $x_z = c_{x_z} + d_{x_z}$ dla pewnych $c_{x_z} \in [\bar{B}]^{\tilde{p}_1}$ oraz $d_{x_z} \in [n_0 \cdot \bar{B}]^{\tilde{q}_1}$, gdzie $\tilde{p}_1, \tilde{q}_1 \in (0, 1]$, $T(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) \geq p$.

Podobnie $y_z = e_{y_z} + f_{y_z}$ dla pewnych $e_{y_z} \in [\bar{A}]^{\hat{p}_1}$ oraz $f_{y_z} \in [n_0 \cdot \bar{A}]^{\hat{q}_1}$, dla $\hat{p}_1, \hat{q}_1 \in (0, 1]$ gdzie $T(\hat{p}_1, \hat{q}_1) \geq q$. Reasumując

$$z = x_z - y_z = c_{x_z} + d_{x_z} - e_{y_z} - f_{y_z} = c_{x_z} - e_{y_z} + d_{x_z} - f_{y_z}.$$

Lemat 5.6 dla $a = \tilde{p}_1, b = \tilde{q}_1, c = \hat{p}_1, d = \hat{q}_1$ implikuje, że $T(\tilde{p}_1, \hat{p}_1) \geq \alpha$ oraz $T(\tilde{q}_1, \hat{q}_1) \geq \alpha$. Wtedy $c_{x_z} - e_{y_z} \in [\bar{B} \ominus \bar{A}]^\alpha$ oraz $d_{x_z} - f_{y_z} \in [n_0 \cdot \bar{B} \ominus n_0 \cdot \bar{A}]^\alpha \subset n_0 [\bar{B} \ominus \bar{A}]^\alpha$ (z założenia indukcyjnego).

Finalnie $z \in (n_0 + 1) [\bar{B} \ominus \bar{A}]^\alpha$, co kończy dowód.

□

W [2] U. Bodenhofer podał sposób, który pozwala na porównanie zbiorów rozmytych przy pomocy porządku przedziałowego $\prec_I$. Jak wynika z definicji I.12. (i rozważań powyżej tej definicji) oraz propozycji I.13 w [2], dla dowolnego $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F}(X)$ mamy:

$$\bar{A} \prec_I \bar{B} \iff \forall_{\alpha \in [0,1]} [\bar{A}]^\alpha \prec_I [\bar{B}]^\alpha \iff \forall_{x \in [\bar{B}]^\alpha} \exists_{y \in [\bar{A}]^\alpha} y \prec x \wedge \forall_{x \in [\bar{A}]^\alpha} \exists_{y \in [\bar{B}]^\alpha} x \prec y$$

Zachodzi także następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 5.7. Załóżmy, że $[\bar{A}]^1, [\bar{B}]^1 \neq \emptyset$ oraz $(X, \prec) = (\mathbb{R}, \leq)$. Wtedy

$$\left(\forall_{\alpha \in [0,1]} \bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B} \right) \implies \bar{A} \prec_I \bar{B}.$$

Ponadto, odwrotne zawieranie nie zachodzi.

Dowód. Załóżmy, że $\forall_{\alpha \in [0,1]} \bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$. Wtedy

$$[\bar{B} \ominus_T \bar{A}]^\alpha = \bigcup_{\{(p,q) \in (0,1]^2: T(p,q) \geq \alpha\}} \{y - x : y \in [\bar{B}]^p, x \in [\bar{A}]^q\} \subset \mathbb{R}_+$$

dla każdego $\alpha \in [0, 1]$. Skoro $T(\alpha, 1) = \alpha = T(1, \alpha) \geq \alpha$, to

$$[\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^1 > 0 \text{ oraz } [\bar{B}]^1 - [\bar{A}]^\alpha > 0.$$

Przypomnijmy, że $[\bar{A}]^1 \subset [\bar{A}]^\alpha$ oraz $[\bar{B}]^1 \subset [\bar{B}]^\alpha$. Mamy

$$\forall_{x \in [\bar{B}]^\alpha} \exists_{y \in [\bar{A}]^\alpha} y \leq x \wedge \forall_{x \in [\bar{A}]^\alpha} \exists_{y \in [\bar{B}]^\alpha} x \leq y,$$

so $\bar{A} \prec_I \bar{B}$.

Zauważmy, że $[\bar{A}]^\alpha \prec_I [\bar{B}]^\alpha$ może być prawdziwe nawet w przypadku $[\bar{A}]^\alpha \cap [\bar{B}]^\alpha \neq \emptyset$ – rozważmy $\bar{A} = \bar{B}$. Z drugiej strony dla t -normy $T_{\min}(x, y) = \min(x, y)$, gdy $\bar{A} \prec_T^\alpha \bar{B}$ to $[\bar{B}]^\alpha - [\bar{A}]^\alpha > 0$ (ponieważ $T_{\min}(\alpha, \alpha) = \alpha \geq \alpha$), więc w szczególności przypadek, gdy $\bar{A} = \bar{B}$ jest wykluczony.

□

5.2 Wnioski

Dobrze jest podkreślić znaczenie wprowadzonego porządku w kontekście do teorii pomiarów.

W pracy [27] udowodniono, że arytmetyka przedziałowa może opisać pomiar z błędem systematycznym. Zaproponowana definicja (5.1) porządku na zbiorach rozmytych jest uogólnieniem porządku przedziałowego, i pozwala na opis pomiarów zawierających błąd przypadkowy. Algebraiczna struktura opisująca błędy systematyczne powinna być wyposażona w relację homotetyczną, (porządek przedziałowy jest homotetyczny), podczas gdy opis błędów niesystematycznych wymaga porządku zadającego relację subhomotetyczną ([46, 42]). Subhomotetyczność relacji komparacji jest warunkiem występowania błędów niesystematycznych. Homotetyczność jest relacją, dla której zachodzi: $n.a \prec n.b \iff a \prec b$ (gdzie $n.a = a \oplus a \dots \oplus a$), dla dowolnej liczby powieleń n , czyli liczba powieleń nie wpływa na dokładność pomiaru.

W pracy [45] zaproponowano model struktury rozmytej z arytmetyką opartą o t -normę, i z porządkiem zdefiniowanym jako porządek przedziałowy na 0-przekroju (porządek przedziałowy na nośnikach zbiorów rozmytych). W tej pracy uogólniamy taki porządek do dowolnego α -przekroju.

Celem takiego rozszerzenia jest analiza niepewności wyników pomiarów tak, aby zachowane były algebraiczne własności modelu probabilistycznego. Niepewność rozszerzona w modelu probabilistycznym zdefiniowana jest jako promień przedziału ufności estymatora wartości oczekiwanej ¹. Wynikiem pomiaru jest więc przedział, który identyfikujemy z przedziałem ufności. Przedziały ufności tworzą rodzinę przedziałów sparametryzowanych przedziałem ufności. W modelu probabilistycznym rodzinę przedziałów wyznacza się metodami statystyki matematycznej dla danej serii pomiarów (traktowanych jako próba losowa) i dodatkowych danych o przyrządzie pomiarowym i warunkach pomiaru [18].

W przypadku modelu rozmytego wynikiem pomiaru jest rodzina zbiorów. Każda niepusta rodzina zbiorów $\mathcal{A}_\alpha$ jest rodziną α –przekrojów pewnych zbiorów rozmytych, gdy dla dowolnych $\alpha, \beta \in (0, 1)$, gdzie $\alpha \leq \beta$, mamy $\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ (patrz [4]). Rodzinę przedziałów spełniających powyższy warunek można uzyskać z rodziny przedziałów ufności na wiele sposobów, jednak niezależnie od sposobu uzyskania takiej rodziny mamy model, w którym zbiór rozmyty generowany przez taką rodzinę reprezentuje wynik pomiaru.

Określenie niepewności pomiaru jest etapem pośrednim do wyznaczenia relacji porządku pomiędzy wynikami pomiarów uzyskanymi w różnych eksperymentach. From a statistical point of view, an appropriate test of the hypothesis should be built. Kryterium tego, że dwa wyniki pomiarów są różne jest to, że przedział ufności różnicy dwóch zmiennych losowych leży poza zerem. W przypadku dwóch klasycznych zmiennych losowych możemy użyć t –rozkładu dla dwóch zmiennych.

W przypadku rozmytej teorii pomiarów kryterium rozróżniania dwóch wyników pomiarowych jest zdefiniowane dla α przekrojów. W modelu rozmytym przedziały ufności są zastąpione przez α –przekroje, dla których stopień jest zdefiniowane przez (5.1).

Własności tego porządku pozwalają na sformułowanie odpowiednich twierdzeń o reprezentacji.

¹Standardowa niepewność nie ma odpowiednika w modelu rozmytym

Rozdział 6

Wnioski z pracy i dalsze badania

Metoda probabilistyczna opisu zjawisk ma swój początek w teorii gier, gdzie gra polega na wyborze ze zbioru określonych możliwości tworzących zbiór zdarzeń elementarnych. Na przełomie XIX i XXw model probabilistyczny stał się podtsawą fizyki statystycznej. Jednocześnie probabilistyka stała się podstawą analizy danych doświadczalnych jako, że w owych czasach niedokładność pomiaru kojarzona była z rozrzutem probabilistycznym. Zbiory rozmyte zaproponowano w drugiej połowie XXw w celu opisanie decyzji eksperckich. Jeśli pomiar opiszemy jako porównania ze wzorcem to podstawowym modelem powinien być model matematyczny opisujący stopień dopasowania wzorca do własności badanego obiektu a nie losowania ze zbioru obiektów.

Błędu nie znamy więc mamy do porównania modele podejmowania decyzji dotyczącej wyboru metody oceny niepewności jako jakiegoś parametru rozkładu błędów. Wybór miary maksytywnej wydaje się być lepszy do analizy danych traktowanych jako decyzja, jednak teoria dominująca z wielowiekowa tradycją działa na przyzwyczajenia. Autorka wyraża przekonanie, że metodę zbiorów rozmytych należy rozwijać tak aby stała się równorzędną teorią.

W tym krótkim rozdziale na zakończenie chciałam przedstawić wybrane wnioski z pracy i naświetlić dalsze kierunki badań.

6.0.1 Podsumowanie i najważniejsze tezy

Jeśli chodzi o podsumowanie i najważniejsze tezy to postanowiłam wyróżnić:

- a) niepewność w modelu zbiorów rozmytych reprezentuje błędy pomiarowe przy założeniu, że podejmowanie decyzji o modelu niepewności opisane jest miarą maksytywną.

Miary maksymalne opisują lepiej proces podejmowania decyzji niż miary addytywne

- b) reprezentacja w zbiorach rozmytych zdefiniowana jest przez własności porządku
- c) transformacja probability to possibility pozwala na połączenie metody A i B w języku zbiorów rozmytych

Jeśli chodzi o dalsze kierunki badań, to z pewnością należałoby

- a) uogólnić transformację probability to possibility dla ogólnej funkcji zależności przekroju α od poziomu ufności p : $\alpha = \alpha(p)$
- b) odpowiedzieć na pytanie, „Czy porządek rozmyty też ma próg o postaci sumy?”
 - 1) składową $\delta_s(a, b)$ dekomponowalną na dwa niezależne składniki:

$$\delta_s(a, b) = \Delta(a) + \Delta(b)$$

- 2) składową $\epsilon(a, b)$ niedekomponowalną na sumę niezależnych składników.

A może próg należałoby wyrazić przy pomocy metryki fuzzy ??

- c) opisać algorytm empirycznego wyznaczania generatora T-normy potrzebnego do arytmetyki składania składowych niepewności
- d) opisać algebraicznie porządki probabilistyczne i zbadać warunki homomorfizmu porządków rozmytych i probabilistycznych
- e) metryka rozmyta w naturalny sposób wynika z zaproponowanego porządku rozmytego, należy zbadać metryki rozmyte i pokazać zastosowanie w metodach dopasowania krzywej do danych doświadczalnych (w odpowiedniku metody najmniejszych kwadratów).

Bibliografia

- [1] Aleskerov F.T., Threshold Utility, Choice, and Binary Relations, Automation and Remote Control, 64 (2003) 350-367.
- [2] Bodenhofer U., Orderings of Fuzzy Sets Based on Fuzzy Orderings Part I: The Basic Approach, Mathware & Soft Computing 15 (2008) 201-218
- [3] Bzowski A., Reprezentacje pomiarów w strukturach rozmytych, Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, Warszawa, 2010.
- [4] A. Bzowski, M. K. Urbański, A note on Nguyen–Fullér–Keresztfalvi theorem and Zadeh’s extension principle, Fuzzy Sets and Systems, 213 (2013) 91–101.
- [5] Bzowski Adam, Urbański Michał, Wójcicka Kinga, Wójcicki Paweł, Note on the Zadeh’s Extension Principle Based on Fuzzy Variable Approach, W: Advances and New Developments in Fuzzy Logic and Technology / Atanassov Krassimir T. [i in.] (red.), Advances in Intelligent Systems and Computing, 2021, vol. 1308, Springer, s.84-92,
- [6] Browkin, J., Zbiory z działaniami Wyd. Szkolne i Ped. Warszawa 1974.
- [7] J.J. Buckley, Y. Qu, On using α -cuts to evaluate fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems, 38 (1990) 309-312.
- [8] Burris S. N., Sankappanavar H.P. A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, 1981.
- [9] L. Coroianu, R. Fullér Nguyen type theorem for extension principle based on a joint possibility distribution, Internat. J. Approx. Reason., 95 (2018) 22–35.
- [10] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Set and Systems: Theory and Applications, Academic Press, Inc., 1980.

- [11] D. Dubois, H. Prade, Additions of interactive fuzzy numbers, IEEE Trans. Automat. Control, 26 (1981) no. 4, 926–936.
- [12] P. Fotowicz, Historyczne źródła teorii błędu i niepewności pomiaru, GUM, Pomiary Automatyka Robotyka, 7–8 2012.
- [13] L. Finkelstein, M. El-hami, R. Ginter, Conceptual design systems of instrument utilising physical laws, Measurement 23 (1998) 9–13.
- [14] L. Finkelstein, Theory and Philosophy of Measurement, In: P.H. Sydenham ed: Handbook of Measurement Sciences, Vol.1. Willey&Sons Ltd. 1982.
- [15] Fishburn P.C., Interval representations for interval orders and semiorders, Journal of Mathematical Psychology, 10 (1973) 91–105.
- [16] R. Fullér, P. Majlender On interactive fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 143 (2004) 355–369.
- [17] R. Fullér, T. Keresztfalvi On generalization of Nguyen’s theorem, Fuzzy Sets and Systems, 41 (1991) 371–374.
- [18] „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”, ISO, 1993. wyd. polskie: Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Główny Urząd Miar, Warszawa, 1999.
- [19] O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass.” Berichte uber die Verhandlungen der Koeniglich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse, 53 (1901) 1-46 (część 1 przetłumaczona przez J. Michell and C.Ernst (1996). The axioms of quantity and the theory of measurement. Journal of Mathematical Psychology, 40, 235–252.)
- [20] Kacprzyk J., Zbiory rozmyte w analizie systemowej, PWN, Warszawa, 1986.
- [21] A. Kolesárová Triangular norm-based addition of linear fuzzy numbers. Fuzzy sets '94, Tatra Mt. Math. Publ. 6 (1995), 75–81.
- [22] Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. and Tversky, A. Foundations of Measurement. Vol. 1, New York: Academic Press 1989.
- [23] Kula W., Miary i ludzie, Książka i Wiedza, 2004.

- [24] L. Mari, The role of deremination and assignment in measurement, *Measurement*, Vol.21 (1997) 79–90.
- [25] L. Mari, Epistemology of measurement, *Measurement* 34 (2003) 17–30.
- [26] G. Mauris G., V. Lasserre, L. Foulloy, „A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement”, *Measurement* 29 (2001), 165–177.
- [27] M. Le Menestrel M., B. Lemaire, „Biased extensive measurement: The general case”, *Journal of Mathematical Psychology*, 50 (2006), 570–581.
- [28] R. Mesiar, A note to the T-sum of L-R fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 79 (1996) 259–261.
- [29] R. Mesiar Shape preserving additions of fuzzy intervals, *Fuzzy Sets and Systems* 86 (1997), no. 1, 73–78
- [30] Ramon E. Moore, Michael J. Cloud, *Introduction to Interval analysis*, Michael J. Cloud, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.
- [31] Nahmias S. *Fuzzy Variables*, *Fuzzy Sets and Systems*, 1 pp. 97–110, 1978.
- [32] L. Narens, *Abstract Measurement Theory*, MIT Press, Massachusetts, 1985.
- [33] Nguyen H.T., A note on the extension principle for fuzzy set, *J. Math. Anal. Appl.* 64 (1978) 369–380.
- [34] J. Pfanzagl, *Theory of measurement*, Physica-Verlag. Würzburg–Wien, 1981.
- [35] Rossi G.B., A probabilistic theory of measurement, *Measurement* 39 (2006) 34–50.
- [36] D. Scott, P. Suppes, „Foundational Aspects of theories of measurement, *J. Symb. Logic*, 23 (1958), 113–128.
- [37] Shilkret N., Maxitive measure and integration, *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 74 (1971), 109–116.
- [38] G. Soylu, A note on a note to the finite T-sum of L-R fuzzy numbers and further considerations, *Fuzzy Sets and Systems*, 443 (2022) 52–57.

- [39] S. S. Stevens, On the Theory of Scales of Measurement, Science New Series, Vol. 103, No. 2684 (Jun. 7, 1946), pp. 677-680
- [40] Suppes P., Krantz D.H., Luce R.D., Tversky A., Foundations of Measurement, vol. 2. Academic Press, New York, 1981.
- [41] Urbański M.K., Bzowski A., Error analysis using fuzzy arithmetic based on t-norm, 12th IMEKO TC1 and TC7 Joint Symposium Man Science & Measurement, l'Universitde Savoie, September 3–5, Annecy, France, 2008.
- [42] M. K. Urbański, Modeling the measurement in algebraic fuzzy structures, Scientific Papers of Warsaw University of Technology, Physics vol. 55, (2011) (in polish: Modelowanie pomiarów w algebraicznych strukturach rozmytych, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Fizyka z. 55, Warszawa, 2011)
- [43] M.K. Urbański, J. Wąsowski, „Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness”, IMEKO-TC7 Symposium. Cracow, Poland, June 25–27, 2002, 102–107
- [44] M.K. Urbański, J. Wąsowski, „Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness”, Measurement, 34 (2003), 61–74
- [45] M. K. Urbański, J. Wąsowski, Fuzzy Measurement Theory, Measurement, 41 (2008) 391–402.
- [46] M. K. Urbański, J. Wąsowski, Algebraic approach to extensive measurement based on direct comparison, Measurement, 42 (2009) 1341–1351
- [47] M.K. Urbański, K.M. Wójcicka, P.M. Wójcicki, „A note on the finite T-sum of L–R fuzzy numbers and further considerations”, Fuzzy Sets and Systems, 417 (2021), 130–139, DOI:10.1016/j.fss.2020.12.023
- [48] M.K. Urbański, D. Krawczyk, K.M. Wójcicka, P.M. Wójcicki, „On fuzzy order in fuzzy sets based on t-norm fuzzy arithmetic”, Fuzzy Sets and Systems, 2024, vol. 487, s.1-13, DOI:10.1016/j.fss.2024.108992
- [49] Urbański M. K., Wójcicka K., Wójcicki P., Probability to possibility transformation as a way to uniform description of systematic and randoms error, PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY, vol. 98 (2022), nr 12, s.159-162

- [50] Urbański M. K., Wójcicka K., Wójcicki P., Fuzzy approach with t-norm arithmetic to analyze measurement uncertainty—concept and algorithm, *PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY*, vol. 99 (2023), nr 11, s.216-220
- [51] Urbański M., Wójcicka K., Wójcicki P., How to Generate a Level Set from a Family of Confidence Intervals, w: *Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support: New Challenges, Solutions and Perspectives / Atanassov Krassimir T. [i in.] (red.)*, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021, vol. 1081, Cham, Springer, s.262-269,
- [52] Urbański M., Wójcicka K., Bolek K., Wójcicki P., Białaś M., Fuzzy approach to analyze measurement uncertainty on the example of magnetic field measurement, referat na konferencji PPM2024, Gliwice 2024.
- [53] Hsien-Chung Wu, Decomposition and construction of fuzzy sets and their applications to the arithmetic operations on fuzzy quantities, *Fuzzy Sets and Systems* 233 (2013) 1– 25
- [54] Hsien-Chung Wu, Generalized extension principle, *Fuzzy Optim. Decis. Mak.* 9 (2010) 31–68
- [55] R. Wójcicki, *Topics in the Formal Methodology of Empirical Sciences*, D.Reidel Publ.Co. Dordrecht/Ossolineum, Wrocław, 1979.
- [56] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8 (1965) 338–353
- [57] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Inform. Sci.* 3 (1971) 177–200.