

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGRA PAWŁA MATRASIA *PODALGEBRY ALGEBR MACIERZY NAD CIAŁEM SPEŁNIAJĄCE TOŻSAMOŚCI KOMUTATOROWE*

JOACHIM JELISIEJEW

Przedstawiona praca dotyczy algebr, a konkretniej podalgebr $\mathcal{A}$ algebr macierzy nad ciałem $M_n(K)$. Podalgebry te są kluczowe w wielu obszarach algebry, gdyż zrozumienie ich jest równoważne zrozumieniu lewych $\mathcal{A}$ -modułów rangi n .

Główna część pracy, Rozdziały 3-4, dotyczy podalgebr $\mathcal{A}$ spełniających tożsamość

$$(1) \quad [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot [x_q, y_q] = 0,$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_q \in \mathcal{A}$. W pracy nazywane są one D_q podalgebrami. Tożsamość ta jest bardzo specyficzna, gdyż jest równoważna warunkowi $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]^q = 0$, czyli nilpotentności komutatora algebry $\mathcal{A}$, patrz Lemat 3.2.1. Przy próbie klasyfikacji takich podalgebr pojawiają się naturalne pytania:

- Jaki jest maksymalny wymiar $\mathcal{A} \subseteq M_n(K)$ spełniającej Tożsamość (1)?
- Jakie są klasy izomorfizmu podalgebr $\mathcal{A} \subseteq M_n(K)$ maksymalnych ze względu na inkluzję?
- Jakie są klasy izomorfizmu podalgebr $\mathcal{A} \subseteq M_n(K)$ maksymalnego wymiaru?

Przypadek $q = 1$, tj. przemiennej algebry $\mathcal{A}$, został zbadany przez Schura oraz Jacobsona, Autor streszcza ich wyniki w podrozdziale §2.1.

W przypadku $q > 1$ wiadomo było znacznie mniej. Odpowiedzi na pierwsze pytanie udzielił Domokos [Dom03], patrz też Równanie (3.1.1) w pracy doktorskiej. Drugie i trzecie z pytań pozostawały otwarte i były explicite sformułowane w [vWZ19]. Przedstawiona praca doktorska udziela na nie wyczerpującej odpowiedzi, którą streszczam poniżej.

Poniżej, $\mathcal{A} \subseteq M_n(K)$ jest podalgebrą spełniającą Tożsamość (1). Zakładamy dodatkowo, że $\mathcal{A}$ jest maksymalna ze względu na inkluzję.

Strategia klasyfikacyjna zastosowana w pracy jest zasadniczo elementarna. Z twierdzenia Liego wynika, że z dokładnością do sprzężenia, podalgebra $\mathcal{A}$ jest zawarta w macierzach blokowo górnotrójkątnych, o blokach $(n_1, \dots, n_q)$, gdzie q jest tym samym, co w (1). Z maksymalności $\mathcal{A}$ wynika, że $\mathcal{A}$ rozkłada się na bloki, przy czym bloki nad diagonalą są pełne, a bloki diagonalne odpowiadają maksymalnym podalgebrom przeminnym, patrz Twierdzenie 3.2.5. Autor nazywa takie algebry *algebrami typu I*, patrz Definicja 3.1.8. W postaci blokowej można już bezpośrednio sprawdzić, że odpowiednia algebra jest maksymalna (Twierdzenie 3.2.7). Autor mówi, że $\mathcal{A}$ jest *algebrą typu II*, jeśli wymiar każdego z diagonalnych bloków jest maksymalny, tj. dla bloku rozmiaru $n_i \times n_i$ odpowiednia podalgebra ma wymiar $\left\lfloor \frac{n_i^2}{4} \right\rfloor + 1$.

Pozostaje zbadać, kiedy dwie algebry $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ typu I są sprzężone. Autor pokazuje tu (Twierdzenie 3.3.6), że jedynie „oczywiste” sprzężenia są możliwe, tj. bloki dla $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mają mieć tę samą wymiary i bloki diagonalne powinny być sprzężone.

Ogólniej, można pytać, kiedy dwie algebry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są izomorficzne. Jest to słabszy warunek, bo izomorfizm algebr nie musi realizować się poprzez sprzężenie. Mimo to, Autor pokazuje (Twierdzenie 3.4.4), że zachodzi ta sama sytuacja, tj. jeśli izomorfizm istnieje, to bloki $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są równych wielkości i algebry w blokach diagonalnych są izomorficzne. Podkreśla on też, że *nie* jest to warunek wystarczający do izomorfizmu.

W ostatniej części rozdziału trzeciego, Twierdzenie 3.5.5, Autor znajduje jawny wzór na maksymalny wymiar D_q podalgebry w $M_n(K)$, tj. maksymalizuje on funkcję wprowadzoną przez Domokosa.

Rozdział czwarty pracy bazuje na obserwacji, że dla $q = n$, każda maksymalna ze względu na inkluzję D_q podalgebra $M_n(K)$ jest sprzężona z podalgebrą $U_n(K)$ macierzy górnorójkątnych. Sugeruje to badanie ogólniej zanurzeń D_q podalgebr w D_{q+t} algebry. Zasadnicze wyniki są otrzymane dla ciała algebraicznie domkniętego K , więc dodają to założenie poniżej. Autor obserwuje (Twierdzenie 4.1.4), że dla $\mathcal{A} \subseteq U_n(K)$ wyniki rozdziału 3 pozostają w mocy *bez zastosowania sprzężenia*. Pokazuje on, że (dla $q \geq 3$) maksymalna D_{q-1} podalgebra jest zawarta w maksymalnej D_q podalgebrze, Twierdzenie 4.2.2. Wreszcie, omawia on przypadek D_{q-t} podalgebry zawartej w D_q podalgebrze i podaje, kiedy to zawieranie jest „oczywistym”, patrz Twierdzenie 4.2.13. Twierdzenie 4.3.5. Ten rozdział kończy badania D_q algebr w pracy.

W rozdziale 5, Autor rozważa tożsamość

$$(2) \quad [[x_1, y_1], z_1] \cdot \dots \cdot [[x_q, y_q], z_q] = 0$$

dla wszystkich $x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_q \in \mathcal{A} \subseteq M_n(K)$. Rolę komutatora pełni tu tożsamość $[[x, y], z]$. Podalgebrę $\mathcal{A}$ spełniającą $[[x_1, y_1], z_1] = 0$ dla wszystkich $x_1, y_1, z_1 \in \mathcal{A}$ nazywa się Ln_2 podalgebrą. Głównym wynikiem dotyczącym podalgebr $\mathcal{A} \subseteq M_n(K)$ spełniających (2) jest Stwierdzenie 5.4.5, które pokazuje, że każda taka maksymalna podalgebra jest sprzężona z algebrą blokowo górnorójkątną, o blokach $(n_1, \dots, n_q)$, gdzie diagonalne bloki są Ln_2 podalgebrą. Pozwala to oszacować (Twierdzenie 5.4.6) z góry maksymalny wymiar $\mathcal{A}$.

Praca jest obszerna i uderza w niej wysoka jakość warsztatowa: nie zdarzają się literówki, praktycznie wszystkie założenia w twierdzeniach są ilustrowane przykładami, całość jest napisana bardzo jasno (chyba jedyna definicja, która była niejasna, to 4.2.6, gdy pojawiają się $\mathcal{A}'$). Nieco dziwi również nazewnictwo *typ* w Definicji 3.1.8: naiwnie oczekiwałbym, że trzy typy algebr znaczą *trzy parami różne typy*, czyli podział, a nie rosnąca hierarchia). Praca jest elementarna, tj. praktycznie mówiąc, jest zrozumiała dla dobrego studenta etapu licencjackiego. Jej wyniki są jednak dostatecznie ważne, by stanowić część publikacji [MvWZ24b, MvWZ24a].

Podsumowując, uważam, że obecna wersja pracy **spełnia zarówno ustawowe, jak i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim**.

LITERATURA

- [Dom03] M. Domokos. On the dimension of faithful modules over finite dimensional basic algebras. volume 365, pages 155–157. 2003. Special issue on linear algebra methods in representation theory. 1
- [MvWZ24a] Paweł Matraś, Leon van Wyk, and Michał Ziemkowski. On the maximum dimensions of subalgebras of $M_n(K)$ satisfying two related identities. *Linear Algebra Appl.*, 698:73–93, 2024. 2
- [MvWZ24b] Paweł Matraś, Leon van Wyk, and Michał Ziemkowski. The structure of subalgebras of full matrix algebras over a field satisfying the identity $\{x_1, y_1\}[x_2, y_2] \cdots [x_q, y_q] = 0$. *J. Algebra*, 657:159–206, 2024. 2
- [vWZ19] Leon van Wyk and Michał Ziemkowski. Lie solvability in matrix algebras. *Linear Multilinear Algebra*, 67(4):777–798, 2019. 1

Podpisany elektronicznie przez
Joachim Jelisiejew; Uniwersytet Warszawski
14.07.2025
11:50:52 +02'00'