



prof. dr hab. Piotr Grzeszczuk
Politechnika Białostocka
Wydział Informatyki

Białystok, 28.08.2025r.

Recenzja

rozprawy doktorskiej magistra Pawła Matrasia

p.t. *Podalgebry algebr macierzy nad ciałem spełniające tożsamości komutatorowe*

dla Rady Naukowej Dyscypliny Matematyka
Politechniki Warszawskiej

Rozprawa doktorska magistra Pawła Matrasia dotyczy teorii algebr skończenie wymiarowych. Rozważana w niej problematyka motywowana jest klasycznymi pracami I. Schura z 1905 roku i N. Jacobsona z 1944 roku. Dotyczyły one opisu maksymalnych przemiennych podalgebr pełnych algebr macierzy $n \times n$ nad ciałami. Wyniki Schura i Jacobsona były inspiracją dla wielu autorów do dalszych badań w tym kierunku. Potwierdzają to prace: R.C. Courtera (Duke Math. J., 1965), W. H. Gustafsona (J. Algebra, 1976), T.J. Laffey'a (Linear Algebra and its Applications, 1985), W.C. Browna (Comm. Algebra, 1994) oraz M. Domokosa i M. Zubora (Journal of Algebra and Its Applications, 2003). W ostatnim okresie obserwujemy duże zainteresowanie kierunkiem pokrewnym, związanym z opisem podalgebr algebr macierzy spełniających pewnego typu tożsamości wielomianowe. Są to prace opublikowane w ostatniej dekadzie przez L. van Wyka, M. Ziembowskiego, J. Szigetiego, J. Van der Berga i P. Matrasia. W tym nurcie mieści się przedłożona rozprawa. Autora interesują podalgebry algebry macierzy spełniające tożsamość wielomianową typu komutatorowego, czyli postaci

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] \cdot \dots \cdot [x_q, y_q] = 0.$$

Są to szczególnie ważne tożsamości, bo jak wynika z twierdzenia Malceva (Algebra and Logic, 1971) każda tożsamość wielomianowa algebry nad ciałem charakterystyki zero jest konsekwencją tożsamości komutatorowych. Podalgebry algebry macierzy $M_n(K)$ spełniające tożsamość komutatorową autor nazywa D_q podalgebrami (od nazwiska M. Domokosa, który w pracy z 2003 roku m.in. oszacował maksymalny wymiar D_q -podalgebry algebry macierzy $M_n(K)$ dla dowolnej liczby $q \leq n$). Jednym z głównych rezultatów rozprawy jest wyznaczenie klas sprzężoności maksymalnych D_q -podalgebr w algebrze macierzy $M_n(K)$ (Twierdzenie 3.2.5). W kolejnym ważnym rezultacie pracy (Twierdzenie 3.4.7), autor rozwiązuje

PL

problem izomorfizmu dla D_q -podalgebr maksymalnego wymiaru nad ciałami algebraicznie domkniętymi. Udowadnia, że izomorficzne D_q -podalgebry maksymalnego wymiaru są sprzężone. Interesujące są wyniki rozdziału czwartego o zanurzaniu D_{q-1} -podalgebr maksymalnych w D_q -podalgebry maksymalne nad ciałami algebraicznie domkniętymi i pokazanie istotności założenia o algebraicznej domkniętości ciała. Końcowa część rozprawy dotyczy podalgebr algebry macierzy spełniających tożsamość wielomianową w postaci iloczynu q komutatorów stopnia 3, czyli $\prod_{i=1}^q [[x_i, y_i], z_i] = 0$. Nazywane są one LD_q -podalgebrami. W Twierdzeniu 5.4.6 autor podaje górne oszacowanie wymiaru LD_q -podalgebry w $M_n(K)$ oraz konstruuje podalgebrę wymiaru maksymalnego.

Rozprawa jest obszerna (143 strony); składa się z wprowadzenia, pięciu rozdziałów oraz bibliografii, w której wymieniono 50 pozycji. Wprowadzenie zawiera motywacje, krótki rys historyczny oraz sformułowania głównych wyników rozprawy.

W rozdziale pierwszym przedstawione są definicje i niezbędna wiedza z zakresu teorii algebr skończenie wymiarowych i algebr spełniających tożsamości wielomianowe. Szczegółowo nie dokładnie zaprezentowano, ważny w wielu miejscach rozprawy, opis podalgebr algebry macierzy $M_n(K)$ zawierających niezerowe ideały nilpotentne.

Rozdział drugi zawiera szczegółowe omówienie wyników Schura i Jacobsona o przemiennych podalgebrach maksymalnego wymiaru w algebrze macierzy $M_n(K)$. Znaczącą część tego rozdziału zajmują przemienne podalgebry maksymalne (w sensie inkluzji), ze szczególnym uwzględnieniem różnic z przemiennymi podalgebrami maksymalnego wymiaru.

W rozdziale trzecim autor zaprezentował rozszerzenie rezultatów o przemiennych podalgebrach na D_q -podalgebry. Zwróćmy uwagę na to, że zgodnie z terminologią wprowadzoną w pracy, przemienne podalgebry są D_1 podalgebrami. Główne wyniki dotyczą wyznaczenia klas sprzężoności maksymalnych D_q -podalgebr oraz wykazania, że w przypadku D_q -podalgebr maksymalnego wymiaru izomorfizm algebr oznacza ich sprzężenie pewną macierzą odwracalną.

Rozdział czwarty poświęcony jest m.in. blokowo trójkątnej postaci maksymalnych D_q -podalgebr zawartych w algebrze macierzy górnotrójkątnych (Twierdzenie 4.1.4). Autor przedstawia m.in. odpowiedź na pytanie z pracy *L. van Wyk, M. Ziemkowski, Lie solvability in matrix algebra, Linear and Multilinear Algebra, 2019*. W ważnym Twierdzeniu 4.3.5 wykazano jednoznaczność postaci blokowo trójkątnej D_q -podalgebr maksymalnego wymiaru.

W ostatnim rozdziale piątym autor rozważa LD_q -podalgebry podalgebry algebry macierzy. Klasa LD_q algebr zawiera m.in. algebry rozwiązalne stopnia 2 w sensie Liego. Badania te są zatem dobrze uzasadnione. Głównym rezultatem jest wyznaczenie maksymalnego wymiaru LD_q -podalgebry w $M_n(K)$ i efektywne wskazanie LD_q -podalgebry maksymalnego wymiaru (Przykład 5.4.9).

PF

Ocena.

Poziom naukowy przedłożonej rozprawy oceniam wysoko. Końcowy efekt rozprawy zależy od wielu rezultatów innych autorów, w tym twierdzeń strukturalnych uzyskanych stosunkowo niedawno przez L. van Wyka i M. Ziembowskiego. Autorowi udało się przedstawić w sposób bardzo klarowny i precyzyjny niezbędną wiedzę o aktualnym stanie wiedzy rozważanej problematyki, co bardzo ułatwia śledzenie dowodów. Praca stanowi kompletne opracowanie na temat struktury podalgebr pełnej algebry macierzy spełniających tożsamości komutatorowe. Liczne komentarze natury syntetycznej, zwracające uwagę czytelnika na trudności jakie były do pokonania i jakie rezultaty są ważne dla uzyskania głównych twierdzeń, w sposób istotny podnoszą jakość rozprawy. Nie mam wątpliwości, że autor wykazał się dużą wiedzą z teorii algebr skończenie wymiarowych i algebry liniowej oraz umiejętnością wykorzystania tej wiedzy do rozwiązywania trudnego zadania badawczego.

Dowody prezentowanych rezultatów mają zróżnicowany stopień trudności. W większości jednak dość skomplikowane technicznie i nasycone kombinatoryką. Ich czytelne, a jednocześnie dostatecznie formalne przedstawienie wymagało więc znacznego wysiłku. Praca, w zakresie prezentacji dowodów, jest dobrze i przejrzysto zredagowana. Rozprawa zawiera komentarze wartościujące uzyskane wyniki i odniesienia do badań innych autorów. Na uwagę zasługują liczne przykłady ilustrujące wprowadzone pojęcia oraz pokazujące istotność czynionych założeń. Lekturę pracy ułatwiłoby znacznie dodanie skróconego indeksu pojęć oraz używanych symboli.

Praca jest w zdecydowanej większości starannie zredagowana, o czym świadczy znikoma liczba błędów redakcyjnych. Przytoczę tu kilka:

- strona 11⁴ i 11⁸: postawienie kwantyfikatora *dla dowolnej liczby naturalnej q ...* na końcu sugeruje (moim zdaniem) spełnianie przez algebry tożsamości dowolnie dużego stopnia. Każdy z wyszczególnionych punktów powinien zaczynać się raczej od: *wyznaczenia dla każdej liczby naturalnej $q \geq 2$ maksymalnego wymiaru....*;
- strona 13¹³: powinno raczej być *problemu izomorfizmu*;
- można mieć zastrzeżenia do precyzji definicji podalgebry przytoczonej na stronie 15; brakuje informacji o działaniach w P ;
- strona 48₁₅: powinno być *ideału generowanego* zamiast *ideał generowanego*;
- strona 133³: powinno być *generowanym* zamiast *generowany*;

Wyniki wchodzące w skład rozprawy stały się podstawą artykułów naukowych, opublikowanych w renomowanych czasopismach. Pan mgr Matraś jest współautorem 2 publikacji (wg. bazy MathSciNet na dzień 28 sierpnia 2025) po jednej w *Journal of Algebra* i *Linear Algebra and its Applications*. Obie prace dotyczą bezpośrednio omawianej rozprawy. Wydaje się, że wyniki z czwartego rozdziału o zanurzaniu maksymalnych D_{q-1} -podalgebr w maksymalne D_q -podalgebry algebry $M_n(K)$ i związane z tym zagadnienie jednoznaczności zapisu w postaci blokowo trójkątnej D_q -podalgebr maksymalnego wymiaru (Twierdzenie 4.3.5) są oryginalne i zostaną opublikowane w dobrym czasopiśmie algebraicznym.

Podsumowanie.

Artykuł 187 ust.1 i 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. **Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce** stwierdza, że *Rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie albo dyscyplinach oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej oraz Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne*. Nie mam wątpliwości, że przedłożona rozprawa spełnia te warunki. Przedstawione rezultaty są wartościowe i ciekawe dla specjalistów. Autor wykazuje też, że potrafi się swobodnie posługiwać dość szerokim spektrum metod oraz głęboką wiedzą z Algebry Liniowej. Uważam, że rozprawa doktorska spełnia, wszystkie ustawowe warunki i uzasadnia nadanie magistrowi Pawłowi Matrasiowi stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie kandydata do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Piotr Grzeszczuk