

dr hab. inż. Roksana Słowik
Katedra Matematyki
Politechniki Śląskiej

Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra Pawła Matrasia
pt. *Podalgebry algebr macierzy nad ciałem
spełniające tożsamości komutatorowe*

Przedłożona rozprawa poświęcona jest algebrom macierzowym określonym nad dowolnym ciałem spełniającym tożsamości wielomianowe zdefiniowane za pomocą komutatorów.

Pracę rozpoczyna zgrabne i treściwe wprowadzenie w badaną tematykę.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe informacje potrzebne do zrozumienia głównych wyników oraz dowodów pracy. W szczególności autor przytacza tu twierdzenie Artina-Wedderburna, omawia znaczenie idempotentów centralnych, a także przedstawia dowód twierdzenia dotyczącego blokowej triangularyzacji podalgebr $M_n(K)$. Warto zauważyć, że chociaż dowód ten nie jest autorski i jego przeprowadzenie nie jest konieczne, bardzo dobrze wpisuje się w pracę i pomaga ją spoić.

Rozdział drugi poświęcony jest przemiennym podalgebrom $M_n(K)$ – tym których wymiary są maksymalne oraz tym, które są maksymalne (względem relacji zawierania). Doktorant przedstawia pełny opis i jednych i drugich. W szczególności opis przemiennych podalgebr $M_n(K)$ maksymalnych wymiarów znany był wcześniej dla $n > 3$ (z pracy Schura), natomiast dla $n = 2, 3$ został uzupełniony przez doktoranta, który w dowodzie wykorzystał metody z pracy promotora.

W rozdziałach trzecim, czwartym i piątym doktorant przedstawia swoje wyniki.

Rozdział trzeci poświęcony jest maksymalnym podalgebrom $M_n(K)$ z tożsamością wielomianową

$$[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_q, y_q] = 0. \quad (1)$$

Przedstawione są tu wyniki z pracy [31]. Algebry spełniające tożsamość (1), ale nie spełniające jej dla $q - 1$ nazywane są D_q algebrami. Pewnego rodzaju punktem wyjścia dla przedstawionych badań jest twierdzenie udowodnione przez Domokosa, który wyznaczył maksymalny wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$. Wymiar ten wyraża się za pomocą podziału (w sensie addytywnym) liczby n na q składników $n_1, n_2, \dots, n_q$. Analogicznie, maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$ są wyznaczone przez kształt $(n_1, \dots, n_q)$, który związany jest z "podziałem" blokowym macierzy. Najważniejszym wynikiem jest tu twierdzenie opisujące maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$. Dokładniej, $\mathcal{A}$ jest taką podalgebrą wtedy i tylko wtedy, gdy jest sprzężona z D_q podalgebrą pewnego kształtu $(n_1, \dots, n_q)$ I typu. Ponadto, dwie D_q podalgebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy ich kształty są równe oraz ich diagonalne bloki są ze sobą sprzężone (tzn. $\mathcal{A}_{ii}$ jest sprzężona z $\mathcal{B}_{ii}$ dla każdego i). Następnie doktorant udowadnia, że dwie D_q podalgebry $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebry $M_n(K)$ nad ciałem algebraicznie

domkniętym, odpowiednio kształtów $(n_1, \dots, n_q)$, $(\ell_1, \dots, \ell_q)$ II typu są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $n_j = \ell_j$ dla każdego j , oraz algebry $\mathcal{A}_{jj}$, $\mathcal{B}_{jj}$ są sprzężone. Dodatkowo wyznacza jawny wzór na maksymalny wymiar D_q podalgebry $M_n(K)$, który stanowi ciekawe uzupełnienie wyniku Domokosa.

W rozdziale czwartym kandydat udowadnia, że każda maksymalna (odpowiednio maksymalnego wymiaru) D_q podalgebra $M_n(K)$, zawarta w algebrze macierzy trójkątnych $U_n(K)$, jest D_q podalgebrą pewnego kształtu $(n_1, \dots, n_q)$ I typu (odpow. III typu). Następnie przechodzi do badania zanurzeń maksymalnych D_{q-t} podalgebr $M_n(K)$ w maksymalne D_q podalgebry $M_n(K)$. Zanurzenia te istnieją tylko przy ściśle określonych warunkach, których pozwolę sobie tu nie przytaczać. Rozdział wieńczy dyskusja na temat jednoznaczności kształtu D_q podalgebr $M_n(K)$. Okazuje się, że w pewnych przypadkach D_q podalgebra $M_n(K)$ może być różnych kształtów, co stanowi interesującą obserwację. Jednakże, przy odpowiednich założeniach ($n = q$ lub $n \geq 4q$) kształt D_q podalgebry jest wyznaczony jednoznacznie.

Rozdział piąty dotyczy podalgebr $M_n(K)$, które są nilpotentnymi lub rozwiązalnymi algebrami Lie'go, co można sprowadzić do spełniania odpowiednich tożsamości komutatorowych (innych niż (1)). Dokładniej, algebra $\mathcal{A}$ jest Lie-nilpotentna indeksu q (krótko - jest Ln_q algebrą), jeśli spełniona jest tożsamość

$$[\dots, [[a_1, a_2], a_3], \dots, a_{q+1}] = 0.$$

Jak się okazuje, algebry te są *związane z pewnym kształtem* $(n_1, \dots, n_q)$. Algebra $\mathcal{A}$ jest rozwiązalna indeksu q (krótko - jest Ls_q algebrą), jeśli spełnia tożsamość $\mathfrak{D}^q(\mathcal{A}) = 0$, gdzie $\mathfrak{D}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ oraz $\mathfrak{D}^{q+1}(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. Można sprawdzić, że D_{2q-1} podalgebry $M_n(K)$ są rozwiązalnymi algebrami Liego indeksu q , jednak niekoniecznie są one jedynymi takimi podalgebrami. W szczególności

$$U_3^*(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ & a & d \\ & & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathcal{A} \right\}$$

jest Ls_2 algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest jednocześnie Ln_2 i D_2 algebrą. Równocześnie, $U_3^*(\mathcal{A})$ jest D_2 algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest przemienna. Dodatkowo, autor konstruuje tu przykład podalgebry $M_9(K)$, która jest Ls_2 algebrą, ale nie jest D_2 algebrą. Ponadto, jeśli $\mathcal{A}$ jest D_2 podalgebrą, to $U_n^*(\mathcal{A})$ (algebra $n \times n$ macierzy górnotrójkątnych, w których wszystkie elementy diagonalne są równe) jest $D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$ algebrą, a także jeśli $\mathcal{A}$ jest Ls_2 algebrą, to $U_n^*(\mathcal{A})$ jest $\text{Ls}_{\lceil \log_2 n \rceil + 2}$ algebrą. Twierdzenia te były wcześniej znane z pracy [50], jednak zapreentowany w rozprawie dowód pierwszego z nich jest autorski.

Ostatnim zagadnieniem poruszonym w pracy są algebry z tożsamością

$$[[x_1, y_1], z_1] [[x_2, y_2], z_2] \cdots [[x_q, y_q], z_q] = 0,$$

nazywane LD_q algebrami. Autor pokazuje, że jeśli $\mathcal{A}$ jest Ls_2 algebrą, to $\mathcal{A}$ jest LD_2 algebrą. Dla $q > 2$ analogiczne twierdzenie nie jest już spełnione. Każda LD_q podalgebra $M_n(K)$ jest zawarta w sprzężeniu podalgebry $M_n(K)$ (pewnego) kształtu $(n_1, \dots, n_q)$. Korzystając (między innymi) z tego faktu doktorant wyznacza ograniczenie górne wymiaru LD_q podalgebry $M_n(K)$.

Główne wyniki przedstawione w pracy zostały uzyskane wspólnie z dwoma współautorami, z których jeden jest promotorem pracy doktorskiej. Zostały one opublikowane w dwóch artykułach (trzeci jest w recenzji), które ukazały się w bardzo dobrych czasopismach. Przedstawione wyniki są zdecydowanie zaawansowane. Dowody przedstawione są w sposób

klarowny. Autor wykorzystuje rachunek komutatorowy, rachunek macierzowy, własności pierścieni (zwłaszcza ideałów), a także pewne metody matematyki dyskretnej (tu mam na myśli obliczenia wykonywane przy szacowaniu).

Wiele rozpraw doktorskich koncentruje się wyłącznie na wynikach autora (co, oczywiście, jest jak najbardziej poprawne). Przedłożona praca zawiera również dowody i dyskusje na temat wyników uzyskanych przez innych matematyków (głównie promotora, ale nie tylko). Uważam, że zabieg ten dał bardzo dobre rezultaty, przyczynił się do większej spójności pracy i sprawił, że tworzy ona zgrabną całość. Podoba mi się również mnogość przykładów, które bardzo dobrze ukazują istotność założeń. Bibliografia zawiera sporo niedawno opublikowanych artykułów, a także monografii, co potwierdza, że doktorant jest dobrze zorientowany w temacie i na bieżąco śledzi dokonania innych autorów. Praca zredagowana jest bardzo dobrze. Dopatrzyłam się kilku drobnych błędów/niedokładności, które wymieniam poniżej.

1. str. 9 - W zdaniu dotyczącym tożsamości chodzi o dowolne, ale ustalone q_1, q_2 .
2. str. 13, "Uzyskana charakteryzacja jest związana ... Wtedy ..." - Ten fragment jest nieco niedopracowany; co oznacza *Wtedy*?
3. str. 21, "Podobnie jak określamy macierze sprzężone, ..." - To zdanie jest nieco niezręczne.
4. str. 28, "Jest to związanie z tym, że jedynie dla takich ..." - Problem ze składnią.
5. str. 137, pierwszy akapit, "Będzie ona w postaci" - Raczej "Będzie ona postaci".
6. Wydaje mi się, że prace [7], [47] umieszczone w bibliografii są niezacytowane w rozprawie, pomimo, iż wszystkie inne pozycje zostały wymienione w tekście.

Uwagi te nie są, w gruncie rzeczy, istotne. Praca jest na wysokim poziomie merytorycznym i redakcyjnym.

Podsumowując, uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia zwyczajowe oraz ustawowe wymagania stawiane pracom doktorskim. W związku z tym wnoszę o przyjęcie tej pracy i dopuszczenie kandydata do dalszych etapów przewodu doktorskiego.