dr hab. Wojciech Kryński
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

Warszawa, 16.10.2023

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Konrada Lomperta
"O pewnych metodach w konstruowaniu całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych"**

1. Wstęp. Rozprawa dotyczy klasycznego zagadnienia całkowalnych potoków geodezyjnych na rozmaitościach. Głównym osiągnięciem jest przedstawienie ogólnej metody konstrukcji takich potoków na przestrzeniach jednorodnych oraz jej zastosowanie do opisania nowych przykładów. Kluczowe wyniki zawarte w rozprawie zostały opublikowane w czasopiśmie SIGMA w 2019 roku w pracy napisanej wspólnie z promotorem, prof. A. Panasyukiem.

Potoki geodezyjne stanowią niezwykle ważną klasę układów hamiltonowskich. Mianowicie, trajektorie wielu układów mechanicznych można opisać jako krzywe geodezyjne pewnej metryki. W tym kontekście badania całkowalności wpisują się w klasyczne zagadnienie całkowalności równań ruchu bryły sztywnej i prowadzą w naturalny sposób do równań Eulera na algebrach Liego, których systematyczne badanie zostało zapoczątkowane przez V. Arnolda i było kontynuowane przez takich matematyków jak S. Manakov, A. Fomenko, A Bolsinov, B. Khesin i ich współpracownicy. Istotny wkład w badanie całkowalnych potoków geodezyjnych mieli także V. Guillemin i S. Stenberg. W rozprawie wykorzystywane jest bi-hamiltonowskie podejście do układów całkowalnych pochodzące od fundamentalnych prac F. Magriego oraz I. Gelfanda.

Rozprawa składa się z 7 rozdziałów, obszernego wstępu oraz trzech dodatków. W pierwszych trzech rozdziałach omówiono podstawowe konstrukcje i fakty dotyczące kolejno: układów hamiltonowskich, potoków geodezyjnych oraz struktur Poissona. Rozdział 4 zawiera wprowadzenie do struktur bi-hamiltonowskich oraz dowód twierdzenia gwarantującego istnienie rodziny funkcji w inwolucji dla pewnej klasy struktur bi-hamiltonowskich. Jest to uszczegółowienie wcześniejszego rezultatu promotora rozprawy. W rozdziale 5 badane są tensory Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych. W szczególności podany jest opis w terminach pewnych rozkładów algebr Liego tych tensorów, dla których stosują się wyniki z rozdziału 4. Rezultaty z rozdziałów 4 i 5 są następnie wykorzystane w rozdziale 6 w dowodach istnienia i konstrukcjach przykładów całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych. Krótki rozdział 7 zawiera opis potencjalnych kierunków dalszych badań. W dodatkach przedstawione są pomocnicze fakty dotyczące algebr Liego oraz kompleksyfikacji rozmaitości analitycznych.

2. Opis wyników. Struktura bi-hamiltonowska na rozmaitości M to para zgodnych struktur Poissona (P_1, P_2) na M, czyli takich, że dowolna kombinacja liniowa $P_1 + tP_2$ jest także strukturą Poissona. W rozprawie kluczową rolę pełnią struktury typu Kroneckera, definiowane w klasyczny sposób poprzez odpowiednią postać normalną pary (P_1, P_2).

W rozdziale 4 rozważane są struktury niezmiennicze ze względu na (właściwe) działanie grupy Liego G na M. Twierdzenie 4.3.1 podaje warunki na to, by redukcja takiej struktury bi-hamiltonowskiej na M do przestrzeni M_H/G, gdzie H to grupa izotropii zadająca główny typ orbit działania G, była typu Kroneckera. Dodatkowo, twierdzenie to opisuje zupełną rodzinę funkcji w inwolucji dla zredukowanej struktury (co bazuje na wcześniejszym twierdzeniu Bolsinova dla struktur typu Kroneckera) i w konsekwencji zupełną rodzinę funkcji w inwolucji względem wszystkich struktur Poissona $P_1 + tP_2$ z wyłączeniem skończonego zbioru wartości t. Jest to dość techniczny rezultat, nieznacznie uogólniający wcześniejsze wyniki promotora rozprawy. Pełni on jednak kluczową rolę w kolejnym rozdziale, w którym jako M jest wzięta wiązka kostyczna przestrzeni jednorodnej G/K, a struktura bi-hamiltonowska jest wyznaczana przez tensor Nijenhuisa.

Tensory Nijenhuisa są to szczególne $(1,1)$-tensory definiowane przez warunek, że ich torsja Nijenhuisa znika. W pracy rozważane są G-niezmiennicze tensory Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych G/K, diagonizowalne i mające parami różne wartości własne. Na początku rozdziału 5 rozprawy podana jest, w Twierdzeniu 5.1.1, odpowiedniość między takimi tensorami Nijenhuisa, a szczególnymi rozkładami algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ na sumę podalgebr. Rezultat ten jest wykorzystywany w Twierdzeniu 5.4.1, które bazuje na wspomnianym wyżej Twierdzeniu 4.3.1 i podaje warunki aby dany tensor Nijenhuisa na G/K definiował strukturę bi-hamiltonowską, typu Kroneckera po redukcji do M_H/G. Warunki podane w Twierdzeniu 5.4.1 mają algebraiczną postać, którą można badać na poziomie algebr Liego. Jest to istotne w zastosowaniach.

Wyniki z rozdziałów 4 i 5 prowadzą do głównego osiągnięcia rozprawy – Twierdzenia 6.1.1. Rozważane są w nim przestrzenie jednorodne z G-niezmienniczym tensorem Nijenhuisa oraz G-niezmienniczą metryką b. Struktury takie definiują dodatkową G-niezmienniczą metrykę, oznaczaną w rozprawie przez b_N. Twierdzenie 6.1.1 mówi, że przy założeniach Twierdzenia 5.4.1, obie metryki b i b_N posiadają całkowalne potoki geodezyjne. Całkowalność potoków wynika z faktu, że istnieje zupełna rodzina funkcji w inwolucji, która została opisana w Twierdzeniu 4.3.1.

W dalszej części rozdziału 6, Twierdzenie 4.3.1 stosowane jest w konkretnych przypadkach grup Liego. Na przykład, Twierdzenie 6.2.2 podaje nowe przykłady całkowalnych potoków geodezyjnych na $SU(2n)/S(U(2m-1) \times U(1) \cap Sp(n))$ i $SO(2n+2)/SO(2n+1) \cap U(n+1)$. Warto wspomnieć, że wszystkie uzyskane całki pierwsze są wielomianowe względem zmiennych pędu (liniowych zmiennych na włóknach wiązki kostycznej).

3. Konkluzja. Przedstawiona rozprawa jest poprawna pod względem merytorycznym. Wykorzystuje zaawansowane techniki teorii algebr Liego i geometrii symplektycznej (a w zasadzie geometrii związanej ze strukturami Poissona), bazujące na znanych wcześniej metodach rozwijanych przez innych matematyków, które jednak prowadzą do nowych konstrukcji całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych. Moim zdaniem rezultaty uzyskane w ramach rozprawy stanowią istotny wkład w rozwój tej dziedziny.

Nie mam również zastrzeżeń do formy redakcyjnej rozprawy – jest ona napisana precyzyjnie, a cała jej struktura jest logicznie spójna (znalazłem jedynie kilka literówek). Rozprawa zawiera obszerną bibliografię, która dobrze odzwierciedla aktualny stan wiedzy.

Moim zdaniem rozprawa spełnia wszystkie wymogi formalne i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim. Z przyjemnością rekomenduję przystąpienie do dalszych etapów postępowania doktorskiego.