Report rozprawy doktorskiej "O pewnych metodach w konstruowaniu całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych"

Autor rozprawy: mgr Konrad Lompert
(promotor: dr hab. Andriy Panasyuk)

September 23, 2024

1 Generalny opis rozprawy doktorskiej

Rozprawa doktorską Konrada Lomperta zatytułowana *"O pewnych metodach w konstruowaniu całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych"* dotyczy badania metod konstrukcji całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych. Rozprawa wykorzystuje teorię algebr Liego oraz układów Hamiltonowskich. Kluczowe elementy to tensory Nijenhuisa oraz struktury bi-Hamiltonowskie, które są stosowane w kontekście przestrzeni jednorodnych grup Liego. Ostatecznie, głównym celem pracy stanowi opisu nowej metody całkowanie potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych.

Warto podkreślić, że badanie potok geodezyjnych to dosyć interesująca tematyka naukowa, jak można wnioskować z literatury rozprawy oraz jej strony od 13 do 17. Rozprawa doktorska kontynuuje tę tematykę i jest, w pewnym sensie, częściowo równoległa do pracy [5] (dyskusja w tym temacie znajduje się również w rozprawie). Główne wyniki rozprawy doktorskiej zostały opublikowane w artykule K. Lompert, A. Panasyuk, *Invariant Nijenhuis tensors and integrable geodesic flows*, SIGMA **15** 056, (2019) (30 pages), mając teraz jedno cytowanie według Google Scholar. Z tego, co udało mi się sprawdzić, nowe wyniki zawarte w Rozdziałach 6.3, 6.4 oraz 6.5 nie zostały wcześniej opublikowane.

Ogólna struktura rozprawy jest następująca:

- Rozdziały 1 i 2 stanowią wprowadzenie do teorii Hamiltonowskich układów mechanicznych oraz potoków geodezyjnych. Omówiono podstawowe pojęcia związane z mechaniką Hamiltona, w tym równania Hamiltona i całkowalności w sensie Liouville'a. Potoki geodezyjne przedstawiono jako jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów, które są rozwiązaniami równań różniczkowych Hamiltonowskich na rozmaitości kostycznej rozmaitości Riemanna.

- Rozdział 3 dotyczy struktur Poissona, całkowalności układów Hamiltonowskich oraz bąka Eulera. Rozdział 4 wprowadza pojęcie struktur bi-Hamiltonowskich, co pozwala na konstrukcję dodatko-wych całek pierwszych. Istotny wynik to Twierdzenie 4.1.1 opisujące rozkład Jordana-Kroneckera dla pary form skośnie-symetrycznych (patr. [2]).

Autor skupia się na metodach redukcji struktur bi-Hamiltonowskich G-niezmienniczych. Drugi istotni wynik to Twierdzenie 4.3.1 dając warunki zupełności rodzin funkcji G-niezmiennych.

- Rozdział 5 koncentruje się na tensorach Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych, ich konstrukcji i roli w generowaniu dodatkowych struktur bi-Hamiltonowskich. Zaprezentowano warunki algebraiczne, które muszą być spełnione, aby struktury te były zgodne i pozwalały na pełną całkowalność układów Hamiltonowskich. Rozdział 5 zawiera najważniejsze wyniki pracy, t.j. Twierdzenie 5.4.1 (uparty między nimi na Twierdzeniu 4.3.1), opublikowane w wersji z wartościami własnymi w $\mathbb{R}$ w [3].

- Rozdział 6 przedstawia przykłady zastosowań teorii w konkretnych przestrzeniach jednorodnych oraz analizuje potoki geodezyjne związane z różnymi klasami metryk. Szczególna uwaga poświęcona jest przestrzeniom flagowym.

- Jeszcze Rozdział 7 podsumuje rozprawę, podaje kilka możliwych rozwinięć pracy. Trzy appendiksy przypominają podstawowe pojęcia używane w pracy.

2 Szczególna zawartość merytoryczna rozprawy

Rozprawa doktorska jest uparta na następujące tematy i narzędzia:

- Przestrzenie jednorodne G/K: Rozprawa koncentruje się na przestrzeniach jednorodnych G/K, gdzie G to reduktywna grupa Liego, a K jest domkniętą podgrupą Liego. Układy Hamiltonowskie są badane w kontekście tych przestrzeni, z uwzględnieniem działania grupy Liego G oraz struktury geometrycznej tych przestrzeni. W szczególności, na przestrzeniach jednorodnych rozważane są układy Hamiltonowskie z niezmienniczymi funkcjami Hamiltona, definiowane na wiązce kostycznej $T^*(G/K)$. Na tej przestrzeni się zakłada istnienie G-niezmienniczej metryki, która można zbudować ze struktury w G pod pewnymi dosyć ogólnymi założeniami.

- Tensor Nijenhuisa: W pracy badane są tensory Nijenhuisa, które są symetrycznymi, niezmienniczymi tensorami typu $(1,1)$ na przestrzeniach jednorodnych spełniającymi pewny warunek całkowalności. Tego typu tensory generują w rozprawie dodatkową strukturę Poissona na wiązce kostycznej $T^*(G/K)$, co pozwala na wprowadzenie struktur bi-Hamilto-nowskich. Tensor Nijenhuisa jest centralnym narzędziem pracy, gdyż jego obecność umożliwia konstrukcję dodatkowych całek pierwszych, co prowadzi do uzyskania pełnej całkowalności układów Hamiltonowskich.

- Struktury bi-Hamiltonowskie: Struktury bi-Hamiltonowskie odgrywają kluczową rolę w teorii układów całkowalnych. Praca rozszerza badania nad strukturami bi-Hamiltonowskimi w kontekście przestrzeni jednorodnych. W szczególności autor rozważa pary Poissona, które powstają poprzez tensor Nijenhuisa. Dzięki temu możliwe jest znalezienie większej liczby całek pierwszych, co prowadzi do dowodzenia całkowalności w sensie Liouville'a.

- Techniki z teorii algebry i grup Liego: Rozprawa używa różne techniki z teorii grup i algebr Liego. W szczególności, autor używa różne rozkłady algebr Liego, podalgebr Cartana, metryk Killinga i inne metody z teorii algebr Liego w celu badania układów bi-Hamiltonowskich. Rozkłady algebr Liego są używane w celu spełnienia wymagania kluczowego twierdzenia, które pozwala na konstrukcji potoków geodezyjnych całkowalnych.

Warto podkreślić, że używania tych technik pokazuje ogólną wiedzę teoretyczną z teorii algebr Liego, grup Liego, teorii Poissona, układów bi-Hamiltonowskich, i układów całkowalnych, które można oczekiwać od osoby z tytułem doktora.

Jak poprzednio podkreślono w mej recenzji oraz w rozprawie doktorskiej, badanie potoków geodezyjnych to ciekawa tematyka naukowa. W szczególności, metody znajdowania całkowalnych potoków geodezyjnych to dosyć interesujący temat badawczy. Dodatkowo, badanie układów całkowalnych też jest bardzo istotna tematyka badawcza matematyczno-fizyczna. Niech teraz przedstawimy najważniejsze wyniki rozprawy doktorskiej, które znajdują się głównie w Rozdziałach 5 i 6, a częściowo w Rozdziale 4. W szczególności, Rozdział 5 podaje teoretyczne wyniki i Rozdział 6 koncentruje się na zastosowaniach związanych z wyznaczaniem całkowalnych potoków geodezyjnych.

Bardziej dokładnie tematyka rozprawy dotyczy badania układów Hamiltonowskich typu $h = (1/2)\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_ip_j$ na T^*Q w lokalnych współrzędnych zaadaptowanych i względem pewnej metryki Riemannowskiej na Q. Sam potok geodezyjny to jedno-parametrowa grupa dyfeomorfizmów $\Phi^t : T^*Q \to T^*Q$ pola Hamiltonowskiego X_h. W szczególności, autor bada przypadek rozmaitości jednorodnej $Q = G/K$ spełniają warunki typu algebraicznego-geometrycznego pozwalające zagwarantować zupełną całkowalność w sensie Liouville'a. Rzut kanoniczny $T^*Q \to Q$ wprowadza krzywe całkowe X_h na linie geodezyjne metryki g.

Niech teraz skrótowo podsumujemy tok wyników rozprawy.

- Na podstawie G-niezmienniczym odwracalnym tensorem Nihenjuisa na rozmaitości jednorodnej posiadającej różne założenia, Twierdzenie 4.3.1 wykona redukcję i twierdzi, w szczególności, że redukowana struktura bi-Hamiltonowska jest typu Kroneckera (według Twierdzenia 4.1.1. oraz [2]), oraz podaje zbiór zupełny inwolutywny. Sam Twierdzenie 4.3.1 jest podobne do wyników w, na przykład, [5], ale moim zdaniem jest nieco bardziej dokładny. Dodatkowo, jeszcze Rozdział 4 przedstawia prosty Lemat 4.3.1 opublikowany w [3].

- Rozdział 5 używa poprzednich wyników na podstawie których buduje struktur bi-Hamiltonowski na wiązce kostycznej przestrzeni jednorazowej. Rozdział 5 jest najważniejszy w rozprawie. Tu mamy dwa ważniejsze wyniki: twierdzenie "przygotuwujący" 5.1.1 oraz kluczowy wynik: Twierdzenie 5.4.1.

  Z grubsza, Twierdzenie 5.1.1 podaje relację między G-niezmienniczym tensorem Nijenhuisa na $T(G/K)$ oraz rozkładami kompleksyfikacji algebry Liego grupy Liego G pewnego rodzaju (jego znaczenie się rozpozna później w rozprawie). Różne przykłady algebr Liego spełniających warunków Twierdzenia 5.1.1 opisane są w Rozdziale 5.2 i ważne rozkłady są prezentowane w Tabeli 1. Po kilku technicznych lematów, nadchodzi Twierdzenie 5.4.1. Na podstawie poprzednich wyników oraz, w szczególności, Twierdzenia 5.1.1., wnioskuje się, że można skonstruować parę Poissona na $T^*(G/K)$ i struktura bi-Hamiltonowska na M_H/G typu Kroneckera. W tym sensie, para się składa z struktury kanonicznej wiązki kostycznej i drugiej pochodzącej z tensora Nijenhuisa. Dowód jest techniczny na podstawie różnych poprzednich lematach, ale dosyć ciekawy.

- Rozdział 6 pokazuje, że spełnienie warunków sformułowanych w Twierdzeniu 5.4.1 pociąga za sobą zupełną całkowalność pewnych potoków geodezyjnych dwóch klas metryk na przestrzeniach jednorodnych. Ważne podkreślić, że warunki podane nie są aż tak restrykcyjne, aby uniemożliwiaść ich zastosowania, jak już było widać z przykładów w poprzednich rozdziałach. Pierwsza klasa metryk dotyczy metryk normalnych, tj. metryka G-niezmienniczą b na przestrzeni jednorodnej G/K, która pochodzi z pewnej dwuniezmienniczej metryki na G, to znaczy przez pewną $\mathrm{Ad}(G)$-niezmienniczą formę dwuliniową B na algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G. Druga klasa dotyczy metryk b_N na G/K, które są generowane przez tensor Nijenhuisa $N : T(G/K) \to T(G/K)$, zdefiniowane zgodnie z zależnością

$$b_N(X,Y) := b((N+N^*)X,Y), \quad X,Y \in \Gamma(T(G/K)).$$

Metryki b_N odpowiadają symetrycznemu $(1,1)$-tensorowi $N+N^*$, gdzie N^* jest sprzężeniem tensora Nijenhuisa N względem metryki normalnej, tj. N^* zdefiniowany jest równaniem

$$b(N^*X,Y) = b(X,NY).$$

Na podstawie Twierdzenia 5.1.1, Twierdzenie 6.1.1 pozwala używać metryki normalniej na G/K do tworzenia metryki posiadającej zupełnie całkowalnej potoki geodezyjnej. Całki pierwsze wtedy należą do klasy funkcji analitycznych, wielomianowych względem pędów. W dalszym ciągu, rozprawa sprawdza spełnienia warunki w poprzednich wynikach i otrzymania całkowalnych potoków geodezyjnych dla czterech przypadków podanych w Tabeli 1 oraz dla metryki normalnej na przestrzeniach flag zupełnych.

3 Komentarz merytoryczny rozprawy doktorskiej

Pomimo ciekawych elementów rozwiniętych w rozprawie, znalazłem drobne problemy dotyczące dokładności treści rozprawy. Aczkolwiek, te błędy i niedokładne części nie wpływają na znaczenie ogólnych metod rozwiniętych w rozprawie. W dalszym ciągu nie opisuje problemów/niedokładności technicznych odnośnie lokalności obiektów, chyba, że są kluczowe dla rozprawy. Dodatkowo, mam pewne zastrzeżenie co do zastosowań otrzymanych wyników.

Po pierwsze, mam wrażenie, że rozprawa nie wyróżnia adekwatnie pomiędzy polem/formą zerującym/cą się oraz niezerowym/ą, co prowadzi do pewnych drobnych problemów technicznych. Definicja 1.2.1 rozmaitości symplektycznej w pracy nie jest poprawna albo nieco myląca. Na przykład, pole wektorowe X, różne od zera na $\mathbb{R}^2$, spełnia warunek, że dla formy zamkniętej $\omega = (x^2+y^2)dx \wedge dy$ na $\mathbb{R}^2$ istnieje pole wektorowe Y, różne od zera, takie, że $\omega(X,Y)$, które jest funkcją, jest różna od funkcji zerowej. Ewidentnie, ω spełnia Definicję 1.2.1, ale to nie jest forma symplektyczna, ponieważ nie jest niezdegenerowana w $0 \in \mathbb{R}^2$. Natomiast, jeżeli lekko zmieniamy znaczenie w Definicji 1.2.1 i zakładamy, że X to pole wektorowe niezerujące się na M i $\omega(X, Y)$ nie zeruje się w żadnym punkcie dla pewnego pola wektorowego Y, to ω jest niezdegenerowana. Jakkolwiek, autor pracy używa w rzeczywistości prawdziwej definicji formy symplektycznej, która wskazuje, że istnieje izomorfizm między rozmaitością styczną i kostyczną, albo pomiędzy modułem pól wektorowych na M i modułem jedno-form różniczkowych na M nad $C^\infty(M)$.

Jeszcze jeden drobny problem znajduje się w Definicji 1.3.1. Układ równań różniczkowych pierwszego rzędu mający $2n$ całek ruchu funkcjonalnie niezależnych opisuje krzywe całkowe pola wektorowego równe zeru, ale nie o to chodzi w rozprawie. Zatem, autor mógł napisać $2n - 1$ całek ruchu zamiast $2n$ w pracy, co miałby sens i daje krzywe rozwiązania bez parametryzacji, albo można rozważyć autonomizację problemu w $M \times \mathbb{R}$ i wtedy $2n$ stałych ruchu (zależnych od dodatkowego parametru autonomizacji), pozwoliłoby całkować problem i znaleźć dokładne parametryzowane krzywe całkowe problemu.

Warto podkreślić na stronie 26, że funkcja Hamiltonowska $H \in C^\infty(T^*Q)$ jest kwadratowa na każdym włóknie T^*Q, które ma struktury przestrzeni liniowej. Zauważmy, że liniowość i wielomianowość nie są pojęciami czysto geometrycznymi rozmaitości, gdyż zależą od współrzędnych i wymagają dodatkowych struktur. W innych częściach pracy zastosowano poprawne sformułowania. Moja uwaga to jedynie drobna poprawka, a znaczenie rozprawy jest jasne. Z drugiej strony, należy również unikać użycia terminu "kanoniczne współrzędne" (q, p), gdyż nie są one kanoniczne; lepiej mówić o współrzędnych zaadaptowanych.

W Definicji 2.1.1, autor zdaje się mieszać koncepty niezerujące i niezerowe pole wektorowe znowu. Poza tym, notacja może być myląca czasami. Oczywiście, widać, że $g(X, X) > 0$ jest warunkiem punktowym, ale $\omega(X, Y) \neq 0$ już nie koniecznie jest warunkiem punktowym, ponieważ nierówność może oznaczać, że $\omega(X, Y)$ jest różne od funkcji zerowej, ale może wyzerować się w niektórych punktach. Oczywiście, autor ma na myśli warunek punktowy i wszystko jest poprawny.

Warto podkreślić, że kiedy cytuje się książkę, jak klasyczną pozycję [1], lepiej zacytować dokładną stronę zawierając dokładny argumenty interesujący dla nas. Dodatkowo, są różne błędy stylistyczne: czasami autor indeksuje równania, czasami nie. Na przykład, (2.1) opisuje $i = 1, \ldots, n$, ale w (2.2) albo (2.4) już nie. Są różne literówki, jak na stronie 29, " ma $\mathfrak{g}$. Nieco istotniejszej, powinno być 'Souriau' zamiast 'Suriau' na stronie 11 oraz 30. Można znaleźć brak punktacji w jednym równaniu na stronie 31, itp. Takie błędy edytorskie pojawiają się od czasu do czasu. Ale to nie poważna wada, chociaż warto pilnować takich spraw. W ogólności, rozprawa jest dobrze napisana. Z tego powodu, nie będę tu ich takich szczegółów dalej wymienił.

W niektórych częściach rozprawy widać niejaśności w rachunkach, chociaż nie do końca wiadomo czy wynikają z powodu błędu rachunkowego czy z notacji iloczynu zewnętrznego albo z innego powodu. Tylko mogę podkreślić, że takie wzory są niejasne. Na przykład, biwektor Poissona $\prod_{\mathfrak{g}^*}$ w Przykładzie 3.3.1 powinien normalnie mieć jeszcze jedną drugą przy nim, ale nie wiadomo czy to błąd, literówka, czy wynika z innej konwencji, np. iloczyn zewnętrzny jako $\partial_i \wedge \partial_j = (\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i)/2$. Przykład 3.3.2 pasuje do wzoru dla $\prod_{\mathfrak{g}^*}$ z taką, powiedziałbym, niestandardową definicję. Jakkolwiek, o ile sprawdziłem, dalsze wzory, np. na stronie 42, są poprawne. Warto byłoby podkreślić konwencję, jeżeli będzie niestandardowa.

Dla jasności, warto byłoby dodać w Twierdzeniu 4.1.1 wymiar macierzy K_1, K_2.

W pracy są niektóre pojęcia, które nie są tak powszechne i nie zostały zdefiniowane.

Funkcje własne tensora Nijenhuisa jest nieco nieprecyzyjny i warto by było krótko wyjaśnić istnienie, konstrukcje, itd. Warto podkreślić, że odnośniki związane z tym pojęciem są źle, albo wymagają wyjaśnienie. Na przykład, autor cytuje pracę [4] na stronie 41, która zaczyna się na stronie 256 związanej książki "Integrability of nonlinear system", ale autor pracy odnosi się do strony 245 tej pracy. Prawdopodobnie, autor się odnosi do 7 wykładu odnośnie tensora Nijenhuisa pracy [4]. Dodatkowo, dla specjalistów w teorii algebry Liego wiadomo co to jest operator pół-prosty, ale warto przypominać skoro przypadek rzeczywisty oraz zespolony są nieco różne i znaczenie tej definicji nie jest powszechnie używane w pracach o układach całkowalnych.

Istnieją niewielkie problemy w rozprawie, które nie wpływają na kluczowe wyniki, lecz wskazują, że mimo dobrego poziomu rozprawy, praca ma drobne błędy edytorskie i brak precyzji w niektórych momentach. Nie będę dalej komentował tych faktów.

Trochę brakuję mi w rozprawie zastosowań wyników Rozdziału 6 do konkretnych układów fizycznych. Literatura dotycząca potoków geodezyjnych całkowalnych uwzględnia chyba raczej mało ciekawych zastosowań fizycznych (praca doktorska podkreśla niektóre z tych potoków). Daję sobie sprawę, że znacząca część literatury o potokach geometrycznych jest raczej matematyczna, ale jeszcze myślę, że warto by było, chociaż minimalnie, szukać konkretnych albo potencjalnych przykładów fizycznych gdzie podane techniki dałby opisać ciekawe układy fizyczne.

Warto podkreślić, że w pracach z dziedziny fizyki i matematyki liczba cytowań często bywa niska. W związku z tym niewielka liczba cytowań pracy [3] nie jest niczym nadzwyczajnym. Pomimo tego, że autor opublikował dotychczas tylko jeden artykuł, należy zauważyć, że pewne części rozprawy mogłyby zostać opublikowane jako kontynuacja prac (koniecznie zawierających nowe wyniki). Biorąc pod uwagę poziom techniczny pracy, który jest dosyć zaawansowany (np. liczne lematy oraz Twierdzenie 5.4.1 w Rozdziale 5), oraz wymagające umiejętności, uważam, że praca ta dowodzi wystarczających zdolności i dojrzałości naukowej doktoranta, co uzasadnia jego dopuszczenie do obrony.

4 Podsumowanie i decyzja

Pomimo drobnych braków i moich uwag krytycznych dotyczących rozprawy, jej ogólne wyniki świadczą o tym, że doktorant posiada wystarczającą wiedzę z zakresu nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyki, aby samodzielnie kontynuować pracę naukową na poziomie doktora w tematyce rozprawy. Praca wnosi istotny wkład w teorię całkowalnych układów bi-Hamiltonowskich i potoków geodezyjnych, proponując nowatorskie metody konstrukcji całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych. Zastosowanie tensorów Nijenhuisa oraz struktur bi-Hamiltonowskich umożliwia odkrycie nowych klas układów całkowalnych, zarówno w sensie teoretycznym, jak i praktycznym, dzięki konkretnym przykładom.

Recenzowana praca spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim przez ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym. Zatem wnoszę, aby mgr Konrad Lompart został dopuszczony do publicznej obrony.

dr hab. Javier de Lucas Araujo, prof. UW.
Warszawa 23-IX-2024.

References

[1] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.

[2] I. M. Gel'fand and I. S. Zakharevich. Spectral theory of a pencil of third-order skew-symmetric differential operators on S^1. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 23(2):1–11, 1989.

[3] K. Lompert and A. Panasyuk. Invariant Nijenhuis tensors and integrable geodesic flows. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 15:Paper No. 056, 30, 2019.

[4] F. Magri. Eight lectures on integrable systems. In *Integrability of nonlinear systems (Pondicherry, 1996)*, volume 495 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 256–296. Springer, Berlin, 1997. Written in collaboration with P. Casati, G. Falqui and M. Pedroni.

[5] I. V. Mykytyuk and A. Panasyuk. Bi-Poisson structures and integrability of geodesic flow on homogeneous spaces. *Transform. Groups*, 9(3):289–308, 2004.