UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki

Warszawa, 5 września 2023

Recenzja rozprawy doktorskiej
Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne
magistra Grzegorza Bajora
dla Rady Naukowej Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej

Rozprawa dotyczy badania algebraicznych własności algebr łącznych (niekoniecznie przemiennych) nad ciałami i koncentruje się na dwóch ogólnych problemach:
(a) badaniu własności anihilatorów;
(b) badaniu maksymalnych przemiennych podalgebr.
Tematyka ta jest silnie zakorzeniona w teorii algebr i pierścieni, jest aktualna i jednocześnie motywowana bardzo klasycznymi rezultatami. Przypomnę, że prawostronnym anihilatorem podzbioru X algebry A nazywamy prawostronny ideał $ann_r(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\}$ Anihilatory w teorii pierścieni i algebr pojawiają się w sposób naturalny. Z jednej strony pozwalają klasyfikować obiekty względem pewnych własności anihilatorów. Z drugiej strony, własności anihilatorów, które są często łatwiej sprawdzalne niż własności ideałów, implikują ważne własności algebr. Tematyka (b) jest bardzo klasyczna, bierze początek w pracy Schura z 1905 roku dotyczącej wymiaru maksymalnej przemiennej podalgebry w algebrze $M_n(K)$ macierzy nad ciałem K i w problemach związanych z maksymalnymi podciałami w algebrach z dzieleniem.

Autor koncentruje się na badaniu wyżej wymienionych problemów w klasie algebr ścieżek Leavitta, oraz algebr wielomianów i szeregów formalnych nad skończenie wymiarowymi algebrami. Konstrukcja Leavitta pochodzi z początków lat 60-tych 20-tego wieku. Pozwala ona, mając dane ciało K i graf E skonstruować algebrę Leavitta $L_K(E)$. Konstrukcja ta jest bardzo ogólna i ważna choćby ze względu na swoje związki z C^* algebrami, tzn. algebrami Banacha z pewną dodatkową strukturą. Wybierając odpowiednio graf E, można również uzyskać dobrze znane algebry takie jak algebrę macierzy $n \times n$ nad K, czy algebrę

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl

wielomianów Laurenta $K[x, x^{-1}]$. Badanie algebraicznych własności algebr Leavitta $L_K(E)$, w terminach własności grafu E, jest w ostatnich latach ważną tematyką w teorii algebr.

Rozprawa bazuje na trzech, już opublikowanych, wspólnych pracach z promotorem (współautorem jednej z nich jest dodatkowo L. van Wyk). W rozdziałach 1 i 2 przedstawione są informacje wstępne. Ta część stanowi ponad połowę rozprawy. Pozostałe trzy rozdziały omawiają rezultaty uzyskane w trzech, wymienionych wyżej, pracach.

W ramach problemu (a) Na wyróżnienie zasługują twierdzenie 3.1.8 oraz stwierdzenia 5.2.3 i 5.3.7. Pierwsze z nich podaje konieczne i dostateczne warunki w terminach własności grafu E na to, aby algebra Leavitta $L_K(E)$ spełniała anihilatorowy warunek (A) (będący nieprzemienna wersją własności mówiącej, że ideały algebry składające się z dzielników zera mają niezerowe anihilatory). Dzięki temu twierdzeniu można łatwo konstruować przykłady algebr Leavitta nie spełniających warunku (A), ale mających własności bliskie algebrom Noetherowskim (które taką własność posiadają). Dowód tego rezultatu jest bardzo pomysłowy, bazujący na specyficznym podziale grafu E, jednocześnie jest bardzo skomplikowany technicznie. Bez wątpliwości wymagał dogłębnego zrozumienia struktury algebr Leavitta.

W stwierdzeniach 5.2.3 i 5.3.7 skonstruowane są przykłady pokazujące, że prawostronny warunek anihilatorowy (a.c.) (mówiący o tym, że każdy ideał I algebry zawiera element c taki, że $ann_r(I)$ jest równy anihilatorowi ideału głównego generowanego przez element c) źle zachowuje się w klasie algebr wielomianów, tzn. istnieją algebry A i B takie, że algebra A i $B[x]$ posiadają własność (a.c.) ale algebry wielomianów $A[x]$ i B jej nie mają. Przykłady te dają negatywną odpowiedź na pytania znane z literatury, ich istnienie jest dalekie (przynajmniej od mojej) intuicji. Zarówno konstrukcje jak i dowody zawierają wiele ciekawych pomysłów, są też bardzo trudne technicznie.

W ramach problemu (b) wyróżnia się Twierdzenie 4.2.1 podające konstrukcję przemiennej podalgebry o maksymalnym wymiarze w pierwszych algebrach Leavitta $L_K(E)$, postać tych podalgebr zależy od własności grafu E. Jest to bardzo eleganckie i głębokie twierdzenie uogólniające, między innymi, klasyczny rezultat Schura.

Powyższe twierdzenie, oraz przykłady skonstruowane w ostatnim rozdziale są, według mnie, najciekawszymi z uzyskanych rezultatów. Bez wątpienia stanowią one rozwiązanie ciekawych i trudnych problemów naukowych, poruszających się w szerokiej problematyce badawczej. Ich rozwiązanie świadczy o dużej dojrzałości matematycznej i znacznym potencjale

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl

matematycznym magistra Bajora. Nie byłoby to możliwe bez solidnej podstawy teoretycznej, dogłębnego zrozumienia problematyki, dużej pomysłowości i umiejętności technicznych.

Moje zastrzeżenia budzi jedynie strona redakcyjna rozprawy, mam wrażenie, że autorowi zabrakło czasu/cierpliwości aby usunąć liczne braki redakcyjne.

Podsumowując stwierdzam, że po uwzględnieniu przez Pana mgr Grzegorza Bajora uwag sformułowanych poniżej dotyczących strony redakcyjnej, recenzowana rozprawa będzie spełniała zarówno warunki określone w artykule 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku jak i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

UWAGI

- Część rozprawy zawierająca informacje wstępne jest za długa. W szczególności zawiera informacje i pojęcia które nie są istotnie wykorzystywane w pracy (np. pojęcie algebr spełniających tożsamość wielomianową).
- Należy uporządkować sprawy związane z referencjami i odnośnikami:
  (a) część z cytowanych rezultatów nie zawiera odnośników do literatury, a zdecydowanie powinna (np. lemat 1.1.2)
  (b) Wiele pozycji bibliografii nie jest używana w rozprawie (na pewno takich pozycji jest powyżej dziesięciu).
  (c) można odnieść wrażenie, że lemat 3.1.5 charakteryzujący proste algebry Leavitta, przedstawiony z dowodem, jest rezultatem uzyskanym przez doktoranta. Tymczasem opis ten jest klasycznym rezultatem otrzymanym przez G. Abramsa i G. Aranda Pino.
- Praca zawiera sporo błędów drukarskich i nieporadnych sformułowań, część z nich jest istotna z punku widzenia precyzji matematycznej (np. zob. definicja 2.2.1, linia 4 ze strony 22, czy literówki w ostatnim akapicie na stronie 42), a część "mało estetyczna" (np. pierwsze dwie linie na stronie 21, str.18 linia 7, przedostatnia linia ze str.32, linia 4 ze strony 34 czy 2 linia lematu 5.1.1)
- W części dotyczącej algebr Leavitta, praktycznie w każdym rezultacie znajduje się

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl

sformułowanie "Niech E będzie grafem i K będzie ciałem". Zapewne warto jest na początku rozdziału napisać, że w całym rozdziale E będzie oznaczało graf, a K będzie ustalonym ciałem i nie powtarzać tych założeń przy każdej możliwej okazji.

- Pewne argumentacje wymagają uzupełnienia lub odesłania do literatury. W szczególności:

  (a) dlaczego, zdefiniowana na końcu strony 27 struktura zadaje gradację na algebrze Leavita?

  (b) strona 30, linia 10: prezentowany dowód nie korzysta z faktu, że algebra $L_K(E)$ posiada gradację;

  (c) ponieważ lemat 4.2.2 dotyczy K-algebr, można w jego sformułowaniu ograniczyć sie jedynie do $k = 1$ (czyli wyeliminować z tezy k).

- Według definicji 1.1.11 każdy element algebry jest dzielnikiem zera, co nie jest prawdą.

- Każda dziedzina spełnia warunki wymienione na początku paragrafu 5.2. Na pewno nie o to chodziło autorowi.

- Porządek shortlex nie został w pracy formalnie zdefiniowany.

- W rozdziale 5-tym, przynajmniej w jednym przykładzie powinno być pokazane jak zastosować Diamond Lemma Bergmana w rozważanej sytuacji, a nie pisać "stosując lemat otrzymamy".

- Argument użyty w dowodzie lematu 5.2.1 wymaga sprecyzowania. Fakt, że β, γ są liniowo niezależne nie dowodzi implikacji, $\alpha(\beta + \gamma) = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0$ i $\alpha\gamma = 0$ (np. takiej implikacji nie ma w algebra $K[x, y, z]/(x(y + z))$.

- Dlaczego zachodzi równość anihilatorów z linii 7 na stronie 75?

- Niestety mam wrażenie, że w wielu miejscach dokładne, proste dowody są przedstawione, natomiast trudniejsze są skwitowane stwierdzeniem "można sprawdzić" i część z takich miejsc powinna być uzupełniona przez podanie argumentów.

- Sugerowałbym też, aby część poświęconą algebrom Leavitta uzupełnić o rysunki pokazujące intuicje dotyczące wykorzystywanych konstrukcji. Wtedy prezentacja stałaby się mniej techniczna, a zarazem bardziej czytelna i atrakcyjna.

JERZY MATCZUK

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki

Warszawa, 20 sierpnia 2024

Ponowna recenzja poprawionej rozprawy doktorskiej
magistra Grzegorza Bajora
Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne
dla Rady Naukowej Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej

Moja recenzja z dnia 5 września 2023 roku, dotycząca rozprawy doktorskiej mgr. Grzegorza Bajora zawierała szereg uwag dotyczących strony redakcyjnej rozprawy i zakończona była warunkową konkluzją. Cytuję:

"Podsumowując stwierdzam, że po uwzględnieniu przez Pana mgr Grzegorza Bajora uwag sformułowanych poniżej dotyczących strony redakcyjnej, recenzowana rozprawa będzie spełniała zarówno warunki określone w artykule 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku jak i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Go do dalszych etapów przewodu doktorskiego."

Po zapoznaniu się z poprawioną wersją rozprawy stwierdzam, że obecnie spełnia ona zarówno formalne jak i zwyczajowe warunki stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę zatem o dopuszczenie mgr. Grzegorza Bajora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jerzy Matczuk

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 534
e-mail: jmatczuk@mimuw.edu.pl