Recenzja rozprawy doktorskiej p. mgr. Grzegorza Bajora, p.t. *Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne*

Tematem recenzowanej rozprawy doktorskiej są pewne własności algebr o strukturze zadanej przez grafy, w szczególności algebr ścieżek Leavitta. Praca oparta jest na następujących trzech pracach, których współautorem jest p. Bajor:

[1] G. Bajor, L. van Wyk, M. Ziembowski, *Construction of a class of maximal commutative subalgebras of prime Leavitt path algebras,* Forum Math. 33 (2021), 1573-90.

[2] G. Bajor, M. Ziembowski, *An annihilator condition for Leavitt path algebras,* Publ. Math. Debrecen 95 (2019), 169-185.

[3] G. Bajor, M. Ziembowski, *Annihilator condition does not pass to polynomials and power series,* J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), 3869-78.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów, dwa pierwsze mają charakter wstępny i przeglądowo-historyczny, trzy pozostałe zawierają oryginalne i częściowo w powyższych artykułach opublikowane wyniki. Bibliografia obejmuje 80 pozycji. Praca nie zawiera końcowych konkluzji.

Pierwszy rozdział rozprawy zawiera skrótowy opis jej treści oraz podstawowe definicje, niektóre znane z elementarnego kursu teorii pierścieni (na przykład ideału, pierścienia wielomianów itp.) inne nieco bardziej zaawansowane. W rozdziale tym pojawiają się pewne niejasności. Na przykład w przytoczonej na stronie 8 definicji pierścienia z warunkiem anihilatorowym (a.c.) nie jest jasne, czym jest *I* (czy jest tym samym, co ideał *V,* o którym mowa wcześniej?). Podobnie na stronie 11 mamy niejasność, wynikającą z braku rozróżnienia pomiędzy pojęciem zbioru (elementy zbioru są nieuporządkowane) a ciągu (tu elementy są uporządkowane). Z kolei na stronie 13 wprowadzono oznaczenie *K<X>*, z którego dalej autor nie korzysta (domyślać się należy, że zastąpił je przez <*X*>). Pomijając te drobne niedociągnięcia, pierwszy rozdział pracy jest dobrym do niej wprowadzeniem nie tylko niezbędnym ale i wielce przydatnym do łatwego jej czytania.

Rozdział drugi zawiera przeglądowe wprowadzenie do teorii algebr ścieżek Leavitta, oparte w dużej mierze na istniejącej literaturze. Czyta się go bardzo dobrze i stanowi on rzetelne przygotowanie do prezentowanych później oryginalnych wyników autora rozprawy. Co prawda treść drugiego akapitu podrozdziału 2.1 nie odpowiada treści akapitu trzeciego, w którym własność IBN jest zdefiniowana poprawnie (mówi ona o liczebności bazy wolnej a nie o liczebności modułu o takiej bazie, jak sugeruje poprzedni akapit), ale można tę nieścisłość wytłumaczyć ograniczeniami czasowymi, które nie pozwoliły autorowi na dokładne przeczytanie tekstu. Drobne uchybienia w opisie algebr Cuntza na stronie 18 (na przykład C*-algebra jest podalgebrą algebry operatorów **ograniczonych**, nie zaś wszystkich operatorów na przestrzeni Hilberta jak sugeruje pierwszy akapit na stronie 18; w wyjaśnieniu czym jest izometria, które znajduje się w Twierdzeniu 2.1.2 brakuje prawej strony równości $S^*S=I$), łatwo wybaczyć autorowi, który nie jest specjalistą w teorii algebr operatorowych. Wysiłek włożony w zebranie i przedstawienie w spójny sposób wiadomości na temat algebr Leavitta jest godzien pochwały.

Rozdział trzeci, w którym autor omawia własności anihilatorowe w algebrze ścieżek Leavitta zawiera pierwsze oryginalne wyniki i opiera się na artykule [2] napisanym przez p. mgr Bajora we współpracy z promotorem. Uwaga jest szczególnie skupiona na własności (A), która jest zdefiniowana jako niezerowość anihilatora dowolnego ideału złożonego wyłącznie z dzielników zera. Podsumowanie rozważań na ten temat zawarte jest w głównych twierdzeniach t.j. Twierdzeniu 3.1.8 i Twierdzeniu 3.1.9, które wiążą własność (A) w algebrze ścieżek Leavitta grafu E z konkretnymi własnościami tego grafu. Nie ma wątpliwości, że ta charakteryzacja jest bardzo istotna i może mieć szerokie zastosowania także w teorii algebr operatorów.

Rozdział czwarty napisany jest na podstawie pracy [1]. Jego tematyką jest konstrukcja maksymalnych przemiennych podalgebr w pierwszych algebrach ścieżek Leavitta. Autor skupia się tu głównie na udowodnieniu Twierdzenia 4.2.1, które przedstawia trzy konkretne konstrukcje maksymalnej podalgebry przemiennej pierwszej algebry ścieżek Leavitta. Konstrukcje te podane są dla trzech różnych typów grafów. Dowód twierdzenia jest złożony i z pewnością nietrywialny; opiera się na dogłębnej analizie struktury algebr Leavitta i szczegółowej analizie przypadków. Rozdział kończy się uwagami na temat maksymalnych przemiennych podalgebr w algebrach ścieżek Leavitta nad przemiennym pierścieniem (a nie tylko nad ciałem, jak do tej pory). Autor przedstawia między innymi nowy, oryginalny dowód postaci takiej algebry opisany wcześniej przez C.G. Canto i A. Nasr-Isfahani.

Piąty i ostatni rozdział rozprawy przedstawia wyniki uzyskane w pracy [3] dotyczące pierścieni spełniających prawy warunek anihilatorowy (w literaturze fachowej określany skrótem a.c.). Konkretnie, autor pokazuje, że spełnianie warunku a.c. przez dany pierścień R nie jest ani konieczne, ani wystarczające do tego aby warunek ten spełniały pierścienie wielomianów lub szeregów formalnych o współczynnikach z R. Dowód opiera się na jawnej konstrukcji odpowiednich pierścieni. Motywując zajęcie się tym problemem autor powołuje się na pytanie zadane w pracy autorów C.Y. Hong, N.K. Kim, Y. Lee oraz S.J. Ryu. O ile jednak rozumiem pierwszy akapit rozdziału 5.1. to nie odzwierciedla on uzyskanego wyniku; autor odpowiada pozytywnie na pytanie czy istnieje pierścień R spełniający warunek a.c., taki jednak, że pierścienie wielomianów lub szeregów formalnych o współczynnikach z R warunku tego nie spełniają, nie zaś negatywnie jak twierdzi.

Podsumowując, recenzowana rozprawa zawiera wiele oryginalnych wyników, w dużej mierze opublikowanych w renomowanych czasopismach międzynarodowych. Pomimo pewnych nieścisłości i niedociągnięć (o których wspomniano powyżej), uważam, że w pełni spełnia warunki wymagane od pracy doktorskiej i oceniam ją jako bardzo dobrą.

Na zakończenie recenzji chciałbym zwrócić uwagę autorowi na fakt, że nie wszyscy matematycy są mężczyznami. Ponieważ język polski rozróżnia pomiędzy rodzajami warto pokusić się o sprawdzenie, czy przywoływana postać jest kobietą czy mężczyzną. Pan mgr Bajor nagminnie zakłada, że autorzy prac matematycznych są mężczyznami. W przypadku, gdy nie jest to jasne, na przykład w przypadku nazwisk dalekowschodnich takich jak Chan Yong Hong lub osób nieznanych można zawsze tak sformułować zdanie, aby uniknąć wskazania płci, nie zaś zakładać, że jest to płeć męska, jak robi to autor na stronie 70 pisząc: *pytanie zadane przez Honga*. Gdy jednak chodzi o **Maryam Mirzakhani,** pierwszą kobietę, która otrzymała Medal Fieldsa, napisać ***dowód tego twierdzenia został przedstawiony przez Mirzakhaniego*** (strona 46 omawianej pracy) to tak, jakby powiedzieć, że polon został odkryty przez Skłodowskiego. Jeżeli recenzowana rozprawa ma być gdziekolwiek publikowana lub przechowywana w bibliotece publicznej, usilnie proszę o usunięcie wszelkich zwrotów mogących sugerować mizoginię.

Tomasz Bruinski

Białystok 31.08.2023

Recenzja (poprawionej) rozprawy doktorskiej p. mgr. Grzegorza Bajora, p.t. *Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne*

Tematem recenzowanej rozprawy doktorskiej są pewne własności algebr o strukturze zadanej przez grafy, w szczególności algebr ścieżek Leavitta. Praca oparta jest na następujących trzech artykułach, których współautorem jest p. mgr Bajor:

[1] G. Bajor, L. van Wyk, M. Ziembowski, *Construction of a class of maximal commutative subalgebras of prime Leavitt path algebras,* Forum Math. 33 (2021), 1573-90.

[2] G. Bajor, M. Ziembowski, *An annihilator condition for Leavitt path algebras,* Publ. Math. Debrecen 95 (2019), 169-185.

[3] G. Bajor, M. Ziembowski, *Annihilator condition does not pass to polynomials and power series,* J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), 3869-78.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów, dwa pierwsze mają charakter wstępny i przeglądowo-historyczny, trzy pozostałe zawierają oryginalne i częściowo w powyższych artykułach opublikowane wyniki. Bibliografia obejmuje 52 pozycje (w poprzedniej wersji: 80 pozycji). Praca nie zawiera końcowych konkluzji.

Pierwszy rozdział rozprawy zawiera skrótowy opis jej treści oraz podstawowe definicje, niektóre znane z elementarnego kursu teorii pierścieni (na przykład ideału, pierścienia wielomianów itp.) inne nieco bardziej zaawansowane. W porównaniu z poprzednią wersją, z obecnej usunięto wskazane w recenzji niejasności i niedociągnięcia i pozostaje mi jedynie powtórzyć wcześniej wyrażoną opinię, że pierwszy rozdział rozprawy jest dobrym do niej wprowadzeniem nie tylko niezbędnym ale i wielce przydatnym do łatwego jej czytania.

Rozdział drugi zawiera przeglądowe wprowadzenie do teorii algebr ścieżek Leavitta, oparte w dużej mierze na istniejącej literaturze. Czyta się go bardzo dobrze i stanowi on rzetelne przygotowanie do prezentowanych później oryginalnych wyników autora rozprawy. Podobnie jak w przypadku rozdziału pierwszego, wprowadzono sugerowane przez tego recenzenta poprawki, słusznie ignorując "na przykład C*-algebra jest podalgebrą algebry operatorów **ograniczonych**, nie zaś wszystkich operatorów na przestrzeni Hilberta jak sugeruje pierwszy akapit na stronie 18", jako że operatory ograniczone na przestrzeni Hilberta są tym samym co operatory ciągłe, a to ostatnie jest i było jasno powiedziane (niestety zostało przeze mnie przeoczone, za co p. mgr. Bajora przepraszam). Powtórzę poprzednią opinię, że wysiłek włożony w zebranie i przedstawienie w spójny sposób wiadomości na temat algebr Leavitta jest godzien pochwały.

Rozdział trzeci, w którym autor omawia własności anihilatorowe w algebrze ścieżek Leavitta zawiera pierwsze oryginalne wyniki i opiera się na artykule [2] napisanym przez p. mgr. Bajora we współpracy z promotorem. Uwaga jest szczególnie skupiona na własności (A), która jest zdefiniowana jako niezerowość anihilatora dowolnego ideału złożonego wyłącznie z dzielników zera. Podsumowanie rozważań na ten temat zawarte jest w głównych twierdzeniach t.j. Twierdzeniu 3.1.8 i Twierdzeniu 3.1.9, które wiążą własność (A) w algebrze ścieżek Leavitta grafu *E* z konkretnymi własnościami tego grafu. Nie ma wątpliwości, że ta charakteryzacja jest bardzo istotna i może mieć szerokie zastosowania także w teorii algebr operatorów. W porównaniu z wcześniejszą wersją pracy, dyskusję wzbogacono między innymi o przykłady, które bardzo dobrze ilustrują rozważane pojęcia.

Rozdział czwarty napisany jest na podstawie artykułu [1]. Jego tematyką jest konstrukcja maksymalnych przemiennych podalgebr w pierwszych algebrach ścieżek Leavitta. Autor skupia się tu głównie na udowodnieniu Twierdzenia 4.2.1, które przedstawia trzy konkretne konstrukcje maksymalnej podalgebry przemiennej pierwszej algebry ścieżek Leavitta. W porównaniu z poprzednią wersją rozdział ten zyskał na uważniejszym wykorzystaniu wyników już opublikowanych, sprecyzowaniu argumentacji i na bardziej przystępnym przedstawieniu złożonego i z pewnością nietrywialnego dowodu głównego twierdzenia. Ten recenzent odnotowuje również z satysfakcją, że Maryam Mirzakhani jest znowu kobietą.

Piąty i ostatni rozdział rozprawy przedstawia wyniki uzyskane w pracy [3] dotyczące pierścieni spełniających prawy warunek anihilatorowy (w literaturze fachowej określany skrótem a.c.). Konkretnie, autor pokazuje, że spełnianie warunku a.c. przez dany pierścień R nie jest ani konieczne, ani wystarczające do tego aby warunek ten spełniały pierścienie wielomianów lub szeregów formalnych o współczynnikach z R. Dowód opiera się na jawnej konstrukcji odpowiednich pierścieni. W porównaniu z poprzednią wersją, autor sprecyzował streszczenie uzyskanych wyników a także uzupełnił niektóre elementy dowodów.

Podsumowując, recenzowana rozprawa zawiera wiele oryginalnych wyników, w dużej mierze opublikowanych w renomowanych czasopismach międzynarodowych. Nieścisłości i niedociągnięcia, które zwróciły uwagę tego recenzenta zostały usunięte. W innych miejscach praca zyskała na sprecyzowaniu argumentacji i uzupełnieniach. Nie mam wątpliwości, że recenzowana rozprawa w pełni spełnia warunki wymagane od pracy doktorskiej i oceniam ją jako bardzo dobrą.

Tomasz Brzeziński