Kraków, 25.08.24

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Konrada Lomperta pt. O pewnych metodach w konstruowaniu całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych

Promotor: dr hab. Andriy Panasyuk

Recenzja została sporządzona na podstawie pisma Pani Przewodniczącej Rady Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej, prof. dr hab. Janiny Kotus, z dnia 17 maja 2024 r., powołującego się na uchwałę Rady Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej z dnia 16 maja 2024 r. w sprawie wyznaczenia recenzentów w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka mgr Konradowi Lompertowi.

Praca doktorska liczy 103 strony i składa się ze wstępu i siedmiu rozdziałów oraz bibliografii. Praca w zasadniczy sposób opiera się na wspólnej publikacji Doktoranta i Promotora [LP19] Konrad Lompert, Andriy Panasyuk, Invariant Nijenhuis Tensors and Integrable Geodesic Flows, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 15 (2019). Głównym celem rozprawy jest konstrukcja nowych przykładów zupełnie całkowalnych potoków geodezyjnych na rozmaitościach jednorodnych.

W pierwszym rozdziale Autor daje wprowadzenie do mechaniki hamiltonowskiej i równań Hamiltona. Omówiona jest przestrzeń fazowa T^*Q układu Hamiltona i kanonicza forma symplektyczna. Wprowadzony jest nawias Poissona. Podana jest definicja układu całkowalnego w sensie Liouvilla.

Następnie, w rozdziale drugim, omówiony jest związek pomiedzy układami Hamiltona i całkowalnością potoku geodezyjnego. Niech (Q, g) rozmaitość riemannowska i $M = T^*Q$. Na M zdefiniowana jest naturalna struktura symplektyczna $\omega = d\theta$ gdzie $\theta_\alpha(X) = \alpha(\pi(X))$ gdzie $\alpha \in M$ i $\pi : M \to Q$ naturalna projekcja. Jeśli (q, p) naturalne współrzędne na M to $\theta = \sum p_i dq_i$ i $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Jeśli zdefiniujemy Hamiltonian $H : M \to \mathbb{R}$ poprzez $H = \frac{1}{2} \sum g^{ij} p_i p_j$ to pole Hamiltona X_H zdefiniowane przez $dH = X_H \lrcorner \omega$ ma tę własność że projekcją jego potoku są geodezyjne na Q.

W rozdziale trzecim Autor definiuje struktury Poissona, rząd i korząd struktury Poissona i podaje konstrukcję struktury Poissona na przestrzeni sprzężonej do algebry Liego $\mathfrak{g}$. Zdefiniowano również liście symplektyczne i funkcje Casimira struktury Poissona (M, Π).

W rozdziale czwartym Doktorant definiuje struktury bihamiltonowskie zadane przez dwie zgodne, liniowo niezależne struktury Poissona Π_1, Π_2. Podana jest również definicja struktury bihamiltonowskiej typu Kroneckera. Jeśli (M, Π) jest strukturą Poissona to przez $Z^{\Pi}(U)$ oznaczamy zbiór funkcji Casimira struktury $(U, \Pi|_U)$ gdzie $U \subset M$ jest otwartym podzbiorem. Jeśli G jest grupą Liego działającą na M to przez M_H oznaczamy sumę orbit typu głównego. Jeśli Π_t jest G-niezmienniczą strukturą bihamiltonowską to otrzymujemy indukowaną strukturę bihamiltonowską Π'_t na rozmaitości $M'_H = M_H/G$. Przy pewnych założeniach (kluczowym założeniem jest działanie lokalnie swobodne grupy G na M_H) Autor dowodzi istnienie zupełnego inwolutywnego zbioru funkcji postaci $p^*(Z^{\{\Pi'_t\}}(p(U) \cup \mu_t^* \mathcal{F}$ względem Π_t dla prawie wszystkich t gdzie $\mathcal{F}$ jest zupełnym, inwolutywnym zbiorem funkcji wielomianowych na $(\mathfrak{g}^*, \Pi_{\mathfrak{g}^*})$. Jednakże dowód tw.4.3.1 jest bardzo zwięzły i autor nie uzasadnia twierdzenia w zbyt przejrzysty sposób, przydałby się komentarz i rozszerzenie treści pracy [LP19] na której opiera się doktorat.

W rozdziale piątym Doktorant omawia struktury bihamiltonowskie generowane przez $(1,1)$ tensory N których tensor torsji Niejenhuisa znika

$$T_N(X,Y) = [NX, NY] - N([NX, Y] + [X, NY] - N([X,Y])) = 0.$$

Autor charakteryzuje G-niezmiennicze dystrybucje na rzeczywistej przestrzeni jednorodnej G/K oraz podaje warunki konieczne i dostateczne by półprosty $(1,1)$-tensor ze stałymi wartościami własnymi był tensorem Nijenhuisa (tzn. $T_N = 0$.) Autor dowodzi również wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy G-niezmienniczymi półprostymi tensorami Nijenhuisa oraz pewnymi rozkładami kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ grupy G. Podaje przykłady konstrukcji takich tensorów na jednorodnych rozmaitościach. W dalszej części omawia struktury bihamiltonowskie zwiazane z tensorem Nijenhuisa. Zdefiniowane jest kostyczne podniesienie $\widetilde{N}$ takich tensorów N. Autor dowodzi że para $(\Pi, \widetilde{N} \circ \Pi)$ generuje strukturę bihamiltonowską gdzie Π jest kanoniczną strukturą Poissona na T^*Q. Autor pokazuje ze prawie wszystkie struktury Poissona powyższej struktury bihamiltonowskiej na $T^*(G/K)$ są niezdegenerowane oraz szczegółowo opisuje liście symplektyczne struktur zdegenerowanych. Dowodzi również że grupa G działa Hamiltonowsko na $T^*(G/K)$ ze wzgledu na niezdegenerowane struktury Poissona i opisuje odwzorowanie momentu. Pokazana jest również hamilonowskość działania grup stabilizatorów liści symplektycznych struktur zdegenerowanych oraz wyliczone odwzorowanie momentu dla tych struktur. Następnie autor podaje warunki konieczne i dostateczne na kroneckerowość struktury bihamiltonowskiej (Π', Π'_1) indukowanej na $M'_H = M_H/G$ w terminach indeksów odpowiednich algebr Liego oraz kowymiaru orbity funkcjonału $\phi^i_F \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\pi(F)})^*$ względem działania kodołączonego $\mathfrak{g}_{\pi(F)}$ na $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\pi(F)})^*$.

W rozdziale szóstym autor wykorzystując uzyskane wcześniej wyniki konstruuje serię niezmienniczych tensorów Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych zwartych, prostych grup Liego G/K: $SU(2n)/S(U(2n-1) \times U(1)) \cap Sp(n), SO(2n+2)/SO(2n+1) \cap U(n+1)), SU(2n)/Sp(2n-2), SO(2n+2)/SU(n)$. Tensory te zadają G-niezmiennicze metryki których potoki geodezyjne są całkowalne w sensie Liouville'a w klasie funkcji analitycznych i wielomianowych względem zmiennych pędu. Autor dowodzi również zupełną całkowalność metryk normalnych na powyższych przestrzeniach jednorodnych. Doktorant również rozważa potok geodezyjny metryki normalnej na rozmaitości flag zupełnych G/T gdzie G jest zwartą grupą Liego a T jej maksymalnym torusem. Autor dowodzi że potok geodezyjny na rozmaitości flag zupełnych G/T jest zupełnie całkowalny w klasie funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu wykorzystując fakt istnienia dyfeomorfizmu miedzy G/T i G^c/B gdzie G^c kompleksyfikacja G a B grupa Borela w G^c.

W rozdziale siódmym autor kreśli perspektywy dalszej pracy badawczej w obszarze całkowalnych potoków geodezyjnych na rozmaitościach jednorodnych.

Lista usterek.

str.22 Definiując pole Hamiltonowskie i nawias Poissona Autor popełnia błąd. Najpierw przy zadanym nawiasie Poissona definiuje pole Hamiltonowskie X_H wzorem $X_H(f) = \{H, f\}$. Następnie w ogólnej sytuacji rozmaitości symplektycznej (M, ω) definiuje pole X_H poprzez $dH = X_H \lrcorner \omega$ a nawias Poissona przez $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. Wynika stąd $\{f, g\} = df(X_g)$ co stoi w sprzeczności z pierwszą definicją pola X_H. Podobnie jeśli ω jest kanoniczną formą symplektyczną co zakłada Autor to formuła na X_H jest otrzymywana z przeciwnym znakiem niż podaje to Doktorant. Zeby otrzymać poprawną formułę na równania Hamiltona trzeba założyć że formą symplektyczną jest

$-d\theta$.

str.33 By definicja 3.3.1. była zgodna z przypadkiem niezdegenerowanej struktury Poissona $\Pi = \omega^{-1}$ gdzie $\Pi(H) = X_H$ i $dH = X_H \lrcorner \omega$ to powinno być $\{f, g\}^{\Pi} = \Pi(g)f$.

str.36 Powinno być, zakładając def.3.3.1, $\Pi_{\mathfrak{g}^*} = \frac{1}{2} c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ ponieważ z podanych definicji wynika że $\{x_i, x_j\} = c_{ij}^k x_k$.

str.44 W pracy [LP19] jest literówka, zbiór $\mu_t^{-1}(Sing\mathfrak{g}^*)$ jest oznaczony jako $\mu_t^*(Sing\mathfrak{g}^*)$, nie rozumiem jednak dlaczego w doktoracie autor bezrefleksyjnie powiela ten błąd.

str.55 Definicja 3.5.1 jest sprzeczna z lokalnym opisem podniesienia kostycznego pola podanym poniżej definicji. Autor definiuje podniesienie kostyczne pola X jako $\widetilde{X} = \Pi(\overline{X})$ gdzie $\Pi = \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p}$. Jeśli $\overline{X}(\alpha) = \alpha(X)$ to w ten sposób otrzymujemy pole $-\widetilde{X}$ o przeciwnym znaku w stosunku do tego które jest opisane poniżej we współrzędnych lokalnych. Niech ϕ_t jednoparametrowa pseudogrupa tranformacji odpowiadająca X. Wtedy ϕ_t działa na T^*M poprzez $\phi_t(\alpha) = \alpha(d_{\phi_t(x)}\phi_{-t})$ gdzie $x = p(\alpha)$. Pole styczne $\widetilde{X}$ do ścieżek ϕ_t nazywamy podniesieniem X do T^*M. Mamy $\phi_t^*(\theta)(X)_\alpha = \alpha(d\phi_{-t}(p(d\phi_t)(X)) = \alpha(X) = \theta(X)$. Zatem $L_{\widetilde{X}}\theta = 0$. Zatem $di_{\widetilde{X}}\theta = -i_{\widetilde{X}}d\theta = -i_{\widetilde{X}}\omega$. Stąd każde pole $-\widetilde{X}$ jest hamiltonowskie z funkcją Hamiltona $\theta(\widetilde{X})(\alpha) = \alpha(X)$.

str.56 Formuła na podniesienie kostyczne tensora K w lokalnych współrzędnych powinna wyglądać następująco: $\widetilde{K} = K_j^i(q)(\frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \otimes dp_i) + p_k(\frac{\partial K_j^k}{\partial q_i} - \frac{\partial K_i^k}{\partial q_j})\frac{\partial}{\partial p_j} \otimes dq_i$.

str.56-60 W założeniach lematów najpierw zakłada się że Π jest kanoniczną strukturą Poissona odwrotną do kanoniczej formy symplektycznej a później w lokalnych współrzędnych Π jest zapisana jako $-\Pi$ (str. 60) bez żadnego uprzedzenia.

str.59 Autor pisze " lewe działanie $\rho : \mathfrak{g} \to \Gamma(TQ)$ jest antyhomomorfizmem " a na str.61 $[\rho(\xi), \rho(\zeta)] = \rho([\xi, \zeta])$ a więc jest to homomorfizm, w dodatku C.4 autor definiuje działanie jako homomorfizm, zatem trzeba sie domyślać czy pole fundamentalne to $X_\xi(x) = \frac{d}{dt}(expt\xi)x$ jak zazwyczaj się przyjmuje czy też jak w dodatku $X_\xi(x) = \frac{d}{dt}(exp - t\xi)x$

str. 66 Autor pisze "Pokażemy prawdziwość równości $corank_{(M_H/G)}(\Pi^{\lambda_i})'_{x'} = corank_{(F/G_F)}(\Pi^{\lambda_i}|_F)'_{x'} + codim_{S_i} G \cdot F$ "po czym tego nie robi, co sprawia wrażenie, że nie bardzo wie czego dowodzi.

str. 73 Funkcja $dimt^E$ jest półciągła z góry str. 94 definicja C.6.2 działania hamiltonowskiego nie jest poprawna

Podsumowując, praca stanowi spójny ciąg rozumowania, zgodny z zasadami pracy naukowej. Rozprawa, rozpoczyna się od obszernego przeglądu literatury oraz motywacji. Spis bibliografii jest bogaty. Temat pracy jest ciekawy łacząc mechanikę Hamiltona i problemy współczesnej geometrii różniczkowej. Doktorant posługuje sie metodami geometrii różniczkowej, teorii grup i algebr Liego, mechaniki Hamiltonowskiej. Autor dowodzi nowe twierdzenia. Celem pracy było podanie nowych przykładów rozmaitości z zupełnie całkowalnym potokiem geodezyjnym i ten cel Doktorant zrealizował przy okazji podając nowe metody konstrukcji zupełnego układu niezależnych całek pierwszych. Rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie postawionego problemu. Niestety z uwagi na dużą ilość błędów zawartych w pracy nie mam pewności że Doktorant ma umiejętność samodzielnej pracy naukowej. Praca na której opiera się doktorat jest pracą współautorską co nie ułatwia zadania oceny samodzielności Doktoranta. W okresie pięciu lat po ukazaniu się pracy [LP19] autor nie napisał żadnej pracy naukowej. Reasumując stwierdzam, że recenzowana rozprawa doktorska mgr. Konrada Lomperta pt. O pewnych metodach w konstruowaniu całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych nie spełnia warunków określonych w art. 13.1 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. z 2017 r. poz. 1789 z późn. zmianami), jak również stosownych zapisów Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zmianami) i wnioskuję do Rady Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej o uzupełnienie i poprawę rozprawy doktorskiej Pana mgr Konrada Lomperta.

dr hab. Włodzimierz Jelonek, prof. PK
Katedra Matematyki Stosowanej
Politechnika Krakowska