Warszawa, 15 Sierpnia 2023

Prof. dr hab. Wojciech Rytter
Wydział, Matematyki, Informatyki i
Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: rytter@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Barbary Nayar pt.

"Kolorowanie grafów Euklidesowych"

Kombinatoryka ciągów (sekwencji, słów) jest ważną częścia matematyki dyskretnej. W dziedzinie tej szczególne miejsce zajmuje problematyka regularności, w szczególności powtórzeń (repetycji). Ciąg postaci x^r, gdzie x jest niepustym ciągiem, nazywamy *r-repetycją*. Na przyład $(ab)^2 = abab$ jest 2-repetycją, zwaną również "kwadratem".

Klasycznym wynikiem związanym z repetycjami jest konstrukcja Thue'ego sprzed ponad stu lat temu nieskończonego słowa ternarnego (3 kolory) nie zawierającego 2-repetycji (kwadratów) oraz nieskończonego słowa binarnego bez 3-repetycji. Inaczej mówiąc wystarczą 2 kolory dla unikania na dyskretnej linii prostej 3-repetycji, oraz 3 kolory dla unikania na prostej 2-repetycji.

Przeważnie repetycje są rozważane w słowach nad ustalonym alfabetem, tutaj alfabetem są kolory i zajmujemy się minimalną liczbą kolorów potrzebnych do pokolorowania, w którym ciąg kolorów nie zawiera repetycji.

Praca pani mgr Anny Nayar poświęcona jest w szczególności kolorowaniom grafów euklidesowych, głównie płaszczyzny i zbioru liczb naturalnych (prostej dyskretnej). W grafach euklidesowych zbiór wierzchołków jest podzbiorem punktów pewnej przestrzeni euklidesowej, do zbioru krawędzi należą wszystkie te pary wierzchołków, między którymi odległość jest elementem pewnego ustalonego zbioru liczb naturalnych. Graf jednostkowy to taki w którym odległości odpowiadające kraędzion mają rozmiar jeden. Ścieżki, których wierzchołki są współliniowe są nazywane prostoliniowymi

Autorka zajmuje się oszacowaniem najmniejszej liczby kolorów gwarantującej istnienie pokolorowania, w którym każda ścieżka prostoliniowa w grafie jednostkowym unika unika r-repetycji.

W pracy rozważane są również *r-antyrepetycje*: ciągi postaci $x_1x_2...x_k$ gdzie fragmenty

x_i są parami różne i mają tę samą długość.

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat wiele publikacji naukowych poświęcono różnego rodzaju wersjom unikania repetycji i występowania antyrepetycji w różnego rodzaju strukturach. Rozprawa dobrze się wpisuje w ciąg publikacji z tej tematyki.

Praca jest strukturalnie dobrze napisana. W pierwszym rozdziale jest wprowadzona podstawowa terminologia i wiele faktów związanych z repetycjamai oraz znane przykłady kolorowania grafów euklidesowych.

W drugim rozdziale autorka przedstawia narzędzia, których używa w pracy. Prezentowana jest tutaj metoda podwójnego zliczania zwana modnie "kompresją entropii", razem z klasycznymi przykładami zastosowań, w szcególności opisany jest w sposób uproszczony dowód poprawności listowego kolorowania ciągów bez powtórzeń.

Główne wyniki pracy są w rozdziałach trzecim (repetycje) i czwartym (antyrepetycje).

Unikanie repetycji.

Wyniki dotyczą głównie kolorowania grafu jednostkowego płaszczyzny unikającego repetycji na ścieżkach prostoliniowych. Pokazano, że graf jednostkowy płaszczyzny można pokolorować dwoma kolorami unikając 43-repetycji na ścieżkach prostoliniowych oraz pokolorować trzema kolorami unikając 24-repetycji. Podobne egzystencjalne wyniki otrzymano też w przypaku większej liczby wymiarów.

Autorka zjęła się też unikaniem repetycji w tzw. podciągach *z przeskokami*. korzystając w sposób skomplikowany z kompresji entropii.

Antyrepetycje.

Pierwszym wynikiem tej części pracy jest twierdzenie mówiące o istnieniu kolorowania listowego liczb naturalnych dla dostatecznie dużego r spełniającego warunek: każdy fragment długości podzielnej przez r w uzyskanym ciągu kolorów jest r-antyrepetycją.

Drugi ciekawy wynik o antyrepetycjach dotyczy kolorowania nieskończonej macierzy w taki sposób, by każda skończona podmacierz miała wszystkie kolumny wzajemnie różne. Autorka udowodniła, że jest to możliwe w kolorowaniu listowym dla list zawierających 6 kolorów. Nietrywialny i pomysłowy dowód korzysta z metody kompresji entropii i zmodyfikowanych słów Dycka.

Mgr Barbara Nayar wykazała się w swojej rozprawie doktorskiej świetną znajomoscią matematyki dyskretnej. Wykazała sie też dużą oryginalnością i pomysłowością w rozwiązywaniu bardzo skomplikowanych technicznie problemów.

Natomiast styl pracy jest raczej *suchy* i *minimalistyczny*, chociaż matematycznie poprawny. Brakuje dostatecznej ilości narracji wyrabiających intuicję.

Rozprawa doktorska jest podsumowaniem dwóch wspólnych publikacji w prestiżowych międzynarodowych czasopismach naukowych. Wyniki ostatniego rozdziału są samodzielnym osiągnięciem, chociaż nie zostały jeszcze opublikowane są na tyle nietrywialne i interesujące że spodziewam się ich publikacji w prestiżowym czasopiśmie.

Konkluzja.

Moja ocena rozprawy jest pozytywna, gdyż rozwiązano w sposób nietrywialny wiele bardzo trudnych i kombinatorycznie ciekawych problemów natury czysto abstrakcyjnej.

Stwierdzam, że rozprawa magister Barbary Nayar spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim.

Wojciech Rytter

Wojciech Rytter