dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

25-09-2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Barbary Nayar *Kolorwanie grafów euklidesowych*

Rozprawa prezentuje różne wyniki dotyczące kolorowania nieskończonych grafów, w tym o zbiorze wierzchołków $\mathbb{R}^d$, w taki sposób, by uniknąć powtórzeń skończonych ciągów kolorów na zadanych ścieżkach tych grafów. Badania w tej dziedzinie mają dobrze ugruntowaną historię i wiążą się z ciekawymi hipotezami; niektóre autorka przytacza. Większość wyników z rozprawy pochodzi z trzech współautorskich artykułów, które ukazały się: w przyzwoitym czasopiśmie *Annals of Combinatorics*, w bardzo dobrym *SIDMA* oraz w *JCTB*, które jest jednym z najlepszych czasopism z matematyki dyskretnej.

Ocena merytoryczna

Wyniki uzyskane przez autorkę uważam za badzo ciekawe, również pod względem metod dowodowych. Autorka wykorzystała cały wachlarz narzędzi współczesnej kombinatoryki, w tym lokalny lemat Lovásza (LLL), związaną z nim metodę Mosera-Tardosa i metody analityczne. Podobało mi się wykorzystanie w dowodach ozdobionych słów Dycka, bo wprawdzie znane są ich zastosowania do przeliczania różnych struktur dyskretnych, ale dla mnie nowością było wykorzystanie ich przy kolorowaniach bez repetycji.

Spośród wielu wyników uzyskanych w rozprawie na wyróżnienie wg mnie zasługuje twierdzenie 5 o unikaniu r-repetycji na ścieżkach prostoliniowych w $\mathbb{R}^2$. Sam wynik jest mocny, a dowód wymagający sporo pracy. Jest też ładną ilustracją zastosowania ważonej wersji LLL.

Uwagę moją przykuło również twierdzenie 8, szacujące parametr $\pi_j(r)$. Jest zaskakujące, bo górna granica niewiele różni się od dolnej, wynikającej z prostego faktu, że jeśli unikamy r-repetycji z j przeskokami, to nie możemy danego koloru używać zbyt często. Podstawienie za symbole ciągu Thuego w dowodzie twierdzenia 8 jest bardzo sprytne.

Mocnym akcentem kończącym rozprawę jest twierdzenie 12 (i wypływający z niego wniosek 2), które mówi o kolorowaniu z list dla nieskończonej macierzy, tak by uniknąć identycznych kolumn w kwadratowych podmacierzach. Jest to samodzielny wynik autorki, uzyskany nietrywialną metodą, korzystającą z idei Mosera-Tardosa. Analiza algorytmu w dowodzie jest trudniejsza niż w dowodach w poprzednich rozdziałach, wykorzystujących tę ideę.

Rozumowania są w całej rozprawie przedstawione z dużą starannością i dbałością o szczegóły. Dawno nie czytałam tak dobrze napisanej pracy.

Pomniejsze uwagi do treści matematycznych

(1) Definicja k-kolorowania: „na k kolorów” jest dwuznaczne.

(2) s.2: Stwierdzenie, że liczba chromatyczna każdego grafu dwudzielnego jest równa 2, nie jest prawdziwe.

(3) Twierdzenie 2: Czy pisząc $D_i \cup A_i$, autorka miała na myśli $D_i \cup \{A_i\}$?

(4) Definicja ozdobionego słowa Dycka: Nie jest dla mnie jasne, jak zdefiniowany jest zbiór A_0 (i w konsekwencji a_0).

(5) Dowód twierdzenia 7: W dwóch miejscach powinno być $\pi_j(r)$ zamiast $\pi_j(2)$.

(6) Dowód twierdzenia 8: Przydałyby się założenia dla a_i, b_i, c, np. że są różne.

(7) Definicja 10: Może nie dostrzegam jakiejś subtelności, ale dlaczego tu się pojawia kres dolny zamiast najmniejszego s?

(8) s.45: Gdy mowa o kolorowaniu płaszczyzny unikającym repetycji na $[1, e]$-ścieżkach prostoliniowych, prócz prac [15] i [31] warto byłoby wspomnieć również o pracy [71].

(9) Twierdzenie 10: Ponieważ ten sam problem kolorowania płaszczyzny rozważali autorzy [71], czy nie należałoby skonfrontować ich wyników z twierdzeniem 10?

(10) s.56, opis kolorowania z list dla nieskończonej macierzy, tak by uniknąć identycznych kolumn i wierszy w kwadratowych podmacierzach: Ciąg Thuego w rozprawie został zdefiniowany dla $\mathbb{N}$, więc podany przepis daje kolorowanie „połowy” macierzy. Przydałoby się tu jakieś dopowiedzenie.

(11) s.60, końcówka dowodu twierdzenia 12: Zapewne zamiast $0(6^M)$ miało tu być $o(6^M)$.

Uwagi redakcyjne

Układ pracy jest przmyślany, a język bardzo ładny. Znalazłam zaledwie 6 literówek, których nie warto wymieniać, wspomnę tylko o jednej, w tytule: powinno być „euklidesowych” zamiast „Euklidesowych”. Powtarzającymi się niedociągnięciami są:

- Zapożyczony z angielskiego sposób odnoszenia się do twierdzeń, lematów, itp., czyli pisanie np. „w Twierdzeniu 12” zamiast „w twierdzeniu 12”.
- Używanie łącznika w roli myślnika.
- Brak przecinków w zdaniach złożonych typu „wykonując ..., otrzymujemy...”.

Konkluzja

Uważam, że rozprawa mgr Barbary Nayar spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim, prezentuje bardzo wysoki poziom i wnioskuję o jej wyróżnienie.

MBednarska

Małgorzata Bednarska-Bzdęga