

Abstract

This PhD thesis covers several topics in optimal design of elastic bodies and structures. Its main objective is to employ modern tools of measure theory and duality to establish the mathematical framework of the optimization problems known in literature as well as to propose new ones. The focus is on the specific class of minimum compliance problems that revolve around a pair of mutually dual variational problems: the displacement-based primal problem and its stress-based dual. In the latter an integral functional of linear growth is being minimized rendering the optimal stress field a tensor valued measure – an object capable of modelling multi-dimensional bodies reminiscent of Michell structures.

The first addressed subject is the Free Material Design (FMD) problem originally posed in middle 90's. It consists in finding a field of the Hooke tensor that may freely change from point to point in the design domain. In this thesis the Bouchitté-Buttazzo theory of Mass Optimization Problem was successfully adapted towards FMD. In the process the formulation of FMD has undergone a considerable generalization: it allows a choice of a closed convex cone of admissible Hooke tensors and a wide class of non-linear constitutive laws. The finite element method was built around the corresponding pair of mutually dual problems arriving at an efficient conic quadratic programming formulation.

For the second topic a completely new problem of optimal design of plane membranes is put forth. It starts with a proposal of a geometrically non-linear model of membrane that is inspired by the von Kármán's theory of plates. Despite the non-linearity the corresponding pair of mutually dual problems is recovered. Analysis of the primal displacement-based problem is amongst the greatest challenges of the thesis. Owing to the apparatus of maximal monotone maps the compactness result is established. The numerical scheme is developed through the concept of ground structure known from truss optimization, once more a conic quadratic program is identified. Finally, an unexpected link to the Monge-Kantorovich optimal transport problem is exposed: the optimal design of membranes conceals a problem of finding a metric that maximizes the transportation cost.

The last subject of the thesis is optimal form-finding. One seeks an optimal structure that concentrates on a single surface spanning a plane horizontal region. Only compressive stresses are permitted and the gravitational load migrates vertically so that it tracks the surface. This thesis puts forward a new idea of constructing an optimal 3D form-structure based on the 2D solution of the optimal membrane problem. The sought surface becomes the graph of the membrane's deflection while the 3D stress on the surface comes from unprojecting the plane pre-stress field. The forms thus constructed are not only a far reaching generalization of Prager-Rozvany optimal arch-grids, but are actually proved to be optimal amongst all the 3D structures – concentrating on a surface or not – provided that the load is vertically transmissible.

Key words: optimal design, compliance minimization, Free Material Design, Michell structures, optimal membrane, Monge-Kantorovich problem, Prager problem, form-finding.

Streszczenie

Niniejsza rozprawa doktorska obejmuje tematykę optymalnego projektowania ciał i konstrukcji sprężystych. Głównym założeniem jest wykorzystanie nowoczesnych narzędzi teorii miary oraz dualności w celu opracowania matematycznej teorii zagadnień optymalizacji, zarówno tych znanych w literaturze, jak i nowo zaproponowanych. Uwaga poświęcona jest szczególnej klasie zadań minimalizacji podatności, które mogą być sprowadzone do pary wzajemnie dualnych zadań wariacyjnych: pierwotnego zadania przemieszczeniowego oraz dualnego zadania naprężeniowego. Ze względu na liniowy wzrost funkcjonału całkowego minimalizowanego w zadaniu dualnym optymalne pole naprężeń jest tensorową miarą.

Pierwszym poruszonym zagadnieniem jest Projektowanie Materiału z Wolnego Wyboru (ang. Free Material Design, FMD), sformułowane w połowie lat 90-tych. Polega ono na optymalnym doborze pola tensora Hooke'a. W niniejszej rozprawie teoria zadania FMD została opracowana poprzez dostosowanie metod Optymalnego Projektowania Masy Bouchitté-Buttazzo. Ponadto sformułowanie FMD zostało uogólnione poprzez możliwość wyboru stożka dopuszczalnych tensorów Hooke'a oraz nieliniowego związku konstytutywnego. Wokół pary wzajemnie dualnych zadań opracowana została metoda elementów skończonych, która finalnie prowadzi do zadania programowania stożkowego.

Zadanie optymalnego projektowania płaskiej membrany jest propozycją nowego sformułowania, poczynsz od geometrycznie nieliniowego modelu membrany. Pomimo nieliniowości zadanie optymalnej membrany udaje się powiązać z parą wzajemnie dualnych zadań. Analiza przemieszczeniowego zadania stanowi jedno z większych wyzwań rozprawy. Pożądana zwartość zbioru dopuszczalnego została udowodniona dzięki aparatowi maksymalnych funkcji monotonicznych. Metoda numeryczna została zbudowana w oparciu o technikę konstrukcji bazowej znaną z optymalizacji kratownic, po raz kolejny otrzymując zadanie programowania stożkowego. Dodatkowo ukazane zostało niespodziewane połączenie z zadaniem optymalnego transportu Monge'a-Kantorowicza: projektowanie optymalnej membrany jest związane z poszukiwaniem metryki, która maksymalizuje koszt transportu.

Jako ostatnie podjęte zostało zagadnienie optymalnego projektowania przekryć. Poszukiwana jest konstrukcja skupiona na pojedynczej powierzchni rozpiętej nad płaskim poziomym obszarem. Dopuszczalne są wyłącznie naprężenia ściskające, podczas gdy obciążenia grawitacyjne migrują pionowo śledząc powierzchnię. W niniejszej rozprawie zaproponowana jest nowa metoda konstruowania optymalnych przekryć na podstawie rozwiązania dwuwymiarowego zadania optymalnej membrany. Poszukiwana powierzchnia jest wykresem ugięcia membrany, natomiast trójwymiarowe pole naprężeń powstaje przez odrzutowanie napięcia w membranie. Tak budowane przekrycia są nie tylko daleko idącym uogólnieniem koncepcji siatek łukowych Pragera-Rozvany'ego, ale również, jak udowodniono, są one optymalne w klasie dowolnych konstrukcji 3D pod warunkiem, że obciążenia są migrujące.

Słowa kluczowe: optymalne projektowanie, minimalizacja podatności, projektowanie anizotropii, konstrukcje Michella, optymalna membrana, zadanie Monge'a-Kantorowicza, zadanie Pragera, projektowanie przekryć.