POLITECHNIKA WARSZAWSKA

DYSCYPLINA NAUKOWA – MATEMATYKA/
DZIEDZINA NAUK – NAUKI ŚCISŁE I PRZYRODNICZE

Rozprawa doktorska

mgr Konrad Lompert

O pewnych metodach w konstruowaniu całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych

Promotor
dr hab. Andriy Panasyuk

WARSZAWA 2024

Podziękowania

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi dr. hab. Andriyowi Panasyukowi za ogromną cierpliwość i nieskończoną wyrozumiałość. Za wsparcie i motywację, nie tylko w kwestiach naukowych, a przede wszystkim za poświęcony mi czas.

Streszczenie

W rozprawie badane są niezmiennicze tensory Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych G/K oraz całkowalność związanych z nimi układów Hamiltonowskich, przy założeniu reduktywności grupy Liego G oraz niezmienniczości funkcji Hamiltona określonej na wiązce kostycznej $T^*(G/K)$. Tensor tego typu generuje dodatkową niezmienniczą strukturę Poissona na $T^*(G/K)$, zgodną z kanoniczną strukturą Poissona na wiązce kostycznej. Powstająca para Poissona poddana redukcji do przestrzeni funkcji G-niezmienniczych, pozwala na znalezienie rodziny G-niezmienniczych funkcji w inwolucji. Sformułowano w terminach algebry Liego warunki dostateczne i konieczne na zupełność tak powstającej rodziny funkcji (Twierdzenie 5.4.1). Uzyskane wyniki zastosowano do dowodu całkowalności w klasie funkcji analitycznych, wielomianowo zależnych od pędów, potoków geodezyjnych dla serii przestrzeni jednorodnych zwartych grup Liego G, z dwoma rodzajami metryk: metryką normalną, oraz metryką związaną z rozkładem grupy G na dwie podgrupy $G = G_1 \cdot G_2$, gdzie K powstaje jako część wspólna podgrup G_1, G_2 (Twierdzenia 6.2.2 i 6.3.2).

Słowa kluczowe: *struktury bihamiltonowskie, układy całkowalne, przestrzenie jednorodne, algebry Liego, całkowalność w sensie Liouville'a*

Abstract

The thesis is devoted to study of invariant Nijenhuis $(1,1)$-tensors on a homogeneous space G/K of a reductive Lie group G and integrability of related with them Hamiltonian systems of differential equations with a G-invariant Hamiltonian function on the cotangent bundle $T^*(G/K)$. Such a tensor induces an invariant Poisson tensor Π_1 on $T^*(G/K)$, which is Poisson compatible with the canonical Poisson tensor $\Pi_{T^*(G/K)}$. This Poisson pair can be reduced to the space of G-invariant functions on $T^*(G/K)$ and produces a family of Poisson commuting G-invariant functions. Necessary and sufficient conditions of the completeness of this family are given in Lie algebraic terms (Theorem 5.4.1). Obtained results are applied to proving the Liouville integrability in the class of analytic integrals polynomial in momenta of the geodesic flow on two series of homogeneous spaces G/K of compact Lie groups G for two kinds of metrics: the normal metric and new classes of metrics related to decomposition of G to two subgroups $G = G_1 \cdot G_2$, where $K = G_1 \cap G_2$ (Theorems 6.2.2 and 6.3.2).

Keywords: *bi-Hamiltonian structures, integrable systems, homogeneous spaces, Lie algebras, Liouville integrability*

Spis treści

Wstęp i motywacja

Układy równań różniczkowych opisujące ewolucje stanu układu są spotykane w wielu dziedzinach nauki, od fizyki przez biologię do ekonomii. Ważne miejsce wśród nich zajmują tzw. układy hamiltonowskie, źródłem których jest mechanika klasyczna. W przestrzeni fazowej obejmującej współrzędne przestrzenne oraz pędy można je zapisać w bardzo elegancki sposób za pomocą jednej funkcji zwanej funkcją Hamiltona lub hamiltonianem, a strukturą matematyczną pozwalającą na taki zapis jest tzw. nawias Poissona. Nawias Poissona jako działanie (spełniające kilka ważnych warunków) na pierścieniu funkcji gładkich na rozmaitości został po raz pierwszy wprowadzony przez S. D. Poissona w [Poi09], jako narzędzie do badania dynamiki układów mechanicznych. Niewiele później C. G. Jacobi [Jac84] zainteresował się nim od strony algebraicznej. Systematyczne badanie geometrii związanej z nawiasem Poissona zaczął S. Lie [Lie80]. Od tego czasu geometria Poissona stała się samodzielną i bardzo ważną teorią, będąc między innymi językiem dla współczesnej mechaniki klasycznej (por. [AMR88]). Podstawowe zagadnienie dotyczące układów równań różniczkowych to pytanie o istnienie rozwiązań oraz o możliwość ich wyrażenia poprzez znane funkcje podstawowe. Ważną rolę w tym zagadnieniu odgrywają tak zwane *całki pierwsze*, czyli funkcje stałe wzdłuż rozwiązań (jak np. energia całkowita układu). Jeżeli możemy znaleźć wystarczająco dużo całek pierwszych to powiemy, że układ jest *zupełnie całkowalny*. Jest to bardzo ważna własność, nie tylko z teoretycznego punktu widzenia, ale również zastosowań. W przykładach bardzo często (jednak nie jest to regułą, zob. [Bro90]) hamiltonowskie układy całkowalne posiadają drugą niezależną strukturę Poissona, która dodatkowo jest zgodna z wyjściową (tj. ich suma też jest strukturą Poissona), takie struktury nazywamy *bihamiltonowskimi*. Za początek teorii układów bihamiltonowskich uznaje się rok 1978, w którym to F. Magri ([Mag78]) wskazał metodę konstrukcji rozwiązań układu bihamiltonowskiego, przy założeniu, że znane jest pewne specjalne pole wektorowe. Badaniem geometrii struktur bihamiltonowskich zajmowano się m.in. w artykułach [Tur89, GZ91, Bol92, GZ93, Pan00, Tur00, BD06, BI14].

Ze względu na zastosowania ważną klasę układów hamiltonowskich stanowią *potoki geodezyjne*, czyli jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów zadane przez równania różniczkowe, których rozwiązania są lokalnie najkrótszymi krzywymi łączącymi dwa ustalone punkty w sensie odległości zadanej za pomocą danej metryki (pseudo-)riemannowskiej. Z zasady Maupertuis, ewolucja stanu każdego tzw. naturalnego układu mechanicznego odbywa się po liniach geodezyjnych, względem pewnej metryki zdefiniowanej przez funkcję Hamiltona. Zastosowanie narzędzi mechaniki Hamiltona pozwala wyciągnąć wnioski dotyczące geometrii rozwiązań równań ruchu, a w szczególnych przypadkach (całkowalność w sensie Liouville'a) również na jawne wyznaczenie globalnych rozwiązań.

Za początek badań nad całkowalnością potoków geodezyjnych można uważać klasyczne Twierdzenie Clairaut (1733) mówiące, że potok geodezyjny na powierzchni obrotowej P posiada całkę liniową, w szczególności jest zupełnie całkowalny (rozumiany jako układ hamiltonowski na T^*P z hamiltonianem równym formie kwadratowej metryki na P). Kolejnymi klasycznymi wynikami tego typu są Twierdzenia o całkowalności bąku Eulera (1765), czyli swobodnej bryły sztywnej, oraz Twierdzenie Jacobiego (1838) o całkowalności linii geodezyjnych na n-wymiarowej elipsoidzie.

We współczesnej matematyce problematyka całkowalności potoków geodezyjnych zajmuje ważne miejsce, w szczególności obszerna literatura matematyczna jest poświęcona całkowalności potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych. Obecna praca poszerza zakres wyników w tej tematyce, z tego powodu ich dokładniejszy przegląd przedstawiamy na zakończenie tego rozdziału opierając się m.in na [Thi81, Mis82, MP04, BJ04b] oraz artykułach cytowane tamże, a także późniejszych pracach, [DGJ09, Jov10, Myk16].

Niniejsza rozprawa, przedstawia nową metodę konstrukcji zupełnie całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych. Niech G będzie reduktywną grupą Liego, $K \subset G$ jej domkniętą podgrupą Liego. Wiązka kostyczna $T^*(G/K)$ wyposażona w kanoniczną strukturę Poissona Π, stanowi przestrzeń fazową układu Hamiltona, z hamiltonianem będącym formą kwadratową q pewnej G-niezmienniczej metryki (pseudo-) Riemanna. Wspomniana metryka może być zbudowana następująco: niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie $\mathrm{Ad}\, G$-niezmienniczą symetryczną formą dwuliniową na algebrze Liego $\mathfrak{g}$, grupy Liego G. Taka forma dwuliniowa zadaje dwuniezmienniczą metrykę na G, która indukuje G-niezmienniczą metrykę $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G/K}$ na przestrzeni jednorodnej G/K zwaną *metryką normalną*. Ponadto, rozważmy symetryczny, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$-niezmienniczy operator (zwany *operatorem bezwładności*) $\mathrm{n}_{\mathfrak{k}^\perp} \colon \mathfrak{k}^\perp \to \mathfrak{k}^\perp$, gdzie $\mathfrak{k}$ jest algebrą Liego podgrupy K, oraz $\mathfrak{k}^\perp$ jest dopełnieniem ortogonalnym do $\mathfrak{k}$ w $\mathfrak{g}$ ze względu na $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Operator bezwładności $\mathrm{n}_{\mathfrak{k}^\perp}$ zadaje G-niezmienniczy $(1,1)$-tensor na wiązce stycznej $N \colon T(G/K) \to T(G/K)$, który jest symetryczny ze względu na $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G/K}$, oraz dodatkową G-niezmienniczą metrykę $\langle \cdot, \cdot \rangle_N := \langle N\cdot, \cdot \rangle_{G/K}$. Pytanie o całkowalność potoków geodezyjnych dla obu metryk $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G/K}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ sprowadza się do znalezienia rodziny składającej się z $\dim(G/K) - 1$ niezależnych funkcji analitycznych i wielomianowych ze względu na zmienne pędu na wiązce kostycznej $T^*(G/K)$, które komutują, ze względu na nawias Poissona, z formą kwadratową q oraz między sobą (są *w inwolucji*). Wiadomo (zob. [BJ04b, Sekcja 5]), że istnieją dwie komutujące względem nawiasu Poissona rodziny funkcji analitycznych $\mathscr{F}_1$ oraz $\mathscr{F}_2$ na $T^*(G/K)$, wśród których będziemy szukać niezależnych całek pierwszych. Rodzina $\mathscr{F}_1$ składa się z funkcji G-niezmienniczych, natomiast do $\mathscr{F}_2$ należą funkcje postaci $\mu_{can}^* f$, gdzie $\mu_{can} \colon T^*(G/K) \to \mathfrak{g}^*$ jest odwzorowaniem momentu odpowiadającym naturalnemu działaniu hamiltonowskiemu grupy Liego G na $T^*(G/K)$ oraz f jest funkcją analityczną na $\mathfrak{g}^*$. Całki pierwsze należące do rodziny $\mathscr{F}_2$ będziemy nazywali *całkami Noether*. Forma kwadratowa q należy do $\mathscr{F}_2$, dobierając rodzinę $\mathscr{F}$ komutujących wielomianów na $\mathfrak{g}^*$ (Twierdzenie Sadetova [Sad04] pokazuje, że istnieje taka rodzina zupełna względem kanonicznego nawiasu Liego–Poissona na $\mathfrak{g}^*$, por. [Bol16]) otrzymamy rodzinę $\mathscr{A} := \mu_{can}^*(\mathscr{F})$ całek pierwszych formy kwadratowej q, będących funkcjami wielomianowymi ze względu na zmienne pędu. Zatem, początkowy problem został zredukowany do konstrukcji komutującej rodziny $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}_1$ funkcji wielomianowych względem zmiennych pędu, będących całkami pierwszymi formy kwadratowej q, dla której zbiór funkcji $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ jest zupełny.

Pewna metoda budowy takiej rodziny $\mathscr{B}$ została zaproponowana w artykule [MP04], dla przestrzeni jednorodnych będących orbitami kodołączonymi $\mathscr{O}$ grupy Liego G. Przedstawiono tam konstrukcje dodatkowej G-niezmienniczej struktury Poissona Π_1 na $T^*(G/K)$, zgodnej z kanoniczną strukturą Π, oraz konstrukcję rodziny funkcji w inwolucji $\mathscr{B}$. Zbiór ten jest związany z parą Poissona (Π', Π'_1), będącą redukcją pary Poissona (Π, Π_1) ze względu na działanie grupy G. Główną rolę w konstrukcji struktury Π_1 odgrywa forma symplektyczna Kirillova–Kostanta–Suriau $\omega_{\mathscr{O}}$ na orbicie kodołączonej $\mathscr{O}$, przyjęto $\Pi_1 = (\omega + \pi^* \omega_{\mathscr{O}})^{-1}$, gdzie $\omega = -\Pi^{-1}$ jest kanoniczną strukturą symplektyczną na $T^*\mathscr{O}$ oraz $\pi\colon T^*\mathscr{O} \to \mathscr{O}$ jest kanonicznym rzutowaniem.

W pracy proponujemy nową metodę konstrukcji rodziny funkcji $\mathscr{B}$. Podobnie jak w [MP04], budujemy dodatkową strukturę Poissona Π_1 zgodną z Π, ale do jej konstrukcji używamy G-niezmienniczego $(1,1)$-tensora Nijenhuisa $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$. W szczególności pozwala to na rozważanie innej klasy przestrzeni jednorodnych niż orbity kodołączone. Dokładniej, dodatkowa struktura jest postaci $\Pi_1 = \tilde{N} \circ \Pi$, gdzie $\tilde{N}$ jest tak zwanym *podniesieniem kostycznym* tensora N. Niezmienniczy $(1,1)$-tensor na G/K jest zdeterminowany przez liniowy operator $\mathrm{n} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Prezentujemy warunki w języku algebr Liego, konieczne i wystarczające do *kroneckerowskości* pary Poissona (Π', Π'_1) otrzymanej przez redukcję ze względu na działanie grupy G pary Poissona (Π, Π_1). Spełnienie warunków prowadzi do zupełności rodziny $\mathscr{B}$, oraz $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ (Twierdzenie 5.4.1). Jako zastosowanie metody konstruujemy serie niezmienniczych $(1,1)$-tensorów Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych G_k/K_k zwartych i prostych grup Liego, gdzie pary (G_k, K_k) to odpowiednio $(SU(2k), S(U(2k-1) \times U(1)) \cap Sp(k))$, $(SO(2k+2), SO(2k+1) \cap U(k+1))$, oraz $SU(2n)/Sp(2n-2)$, $SO(2n+2)/SU(n)$, które w konsekwencji zadają G-niezmiennicze metryki z potokami geodezyjnymi całkowalnymi w sensie Liouville'a w klasie funkcji analitycznych i wielomianowych względem zmiennych pędu (Twierdzenie 6.2.2 i 6.3.2). Ponadto dowodzimy całkowalności metryk normalnych na wspomnianych wyżej przestrzeniach jednorodnych. Jak już zaznaczyliśmy, przestrzenie te nie należą do klasy orbit kodołączonych jak również, wg. naszej wiedzy, do innych klas przestrzeni jednorodnych obecnych w literaturze, które były badane pod względem całkowalności potoków geodezyjnych metryk normalnych lub innych. Jako dodatkowe zastosowanie, uzyskujemy też nowy dowód całkowalności potoku geodezyjnego metryki normalnej na przestrzeniach flag zupełnych.

Przejdźmy do omówienia treści rozprawy. Początkowe dwa rozdziały stanowią zwięzłe wprowadzenie do teorii układów Hamiltona oraz sformułowanie problemu całkowalności potoków geodezyjnych w języku mechaniki hamiltonowskiej. Rozdział 3 poświęcony jest pojęciom związanym ze strukturami Poissona oraz twierdzeniom przygotowawczym do badania zupełności rodzin funkcji w inwolucji. Zupełną całkowalność ilustrujemy na przykładzie ruchu swobodnego bryły sztywnej (bąk Eulera). Rozdział 4 stanowi wprowadzenie do struktur bihamiltonowskich. Sformułowane Twierdzenie 4.3.1 podaje warunki zupełności rodziny funkcji G-niezmienniczych, związanych z działaniem grupy Liego G na rozmaitości M wyposażonej w strukturę bihamiltonowską przy założeniu, że powyższe działanie jest hamiltonowskie ze względu na prawie wszystkie struktury Poissona z badanego pęku. Najistotniejsze wśród założeń twierdzenia wymaga, aby działanie G na M było *lokalnie swobodne*, pozwala ono na zastosowanie tak zwanego Lematu o bifurkacji (Lemat C.6.3) i pokazania równości rzędów prawie wszystkich redukcji struktur Poissona. Jest to pierwszy krok do otrzymania kroneckerowskości pęku Poissona.

W rozdziale 5 badamy struktury bihamiltonowskie na $T^*(G/K)$ generowane przez parę Poissona $(\Pi, \Pi_1 = \tilde{N} \circ \Pi)$, gdzie N jest niezmienniczym półprostym $(1,1)$-tensorem Nijenhuisa, $\tilde{N}$ jego podniesieniem kostycznym. W Twierdzeniu 5.1.1 dowodzimy zachodzenie nawzajem jednoznacznej odpowiedniości między G-niezmienniczym tensorem Nijenhuisa na G/K i rozkładem algebry Liego $\mathfrak{g}$ na sumę podalgebr. Prezentujemy przykłady możliwych rozkładów, spośród których w następnym rozdziale (6) skupiamy się na liście Onishchika (Przykład 5.2.5) rozkładów $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ prostej zwartej algebry Liego na dwie podalgebry. Pokazujemy, że prawie wszystkie (*generyczne*) struktury Poissona z odpowiadającego pęku są niezdegenerowane oraz obliczamy wymiary liści symplektycznych *wyjątkowych* (nie będących generycznymi) struktur Poissona (Lemat 5.3.4). Dowodzimy hamiltonowskości kanonicznego działania grupy G na $T^*(G/K)$ ze względu na generyczne struktury Poissona, oraz hamiltonowskości działania pewnych podgrup (stabilizatorów liści symplektycznych) na liściach symplektycznych wyjątkowych struktur z pęku Poissona. Wyznaczamy odwzorowania momentu (Lemat 5.3.5) oraz wspomniane stabilizatory (Lemat 5.3.6). Głównym wynikiem rozdziału (i całej rozprawy) jest Twierdzenie 5.4.1 opisujące warunki dostateczne i konieczne do kroneckerowskości pary Poissona (Π', Π'_1) w terminach *indeksów* algebr Liego $\mathfrak{g}$ oraz indeksów pewnych ich kontrakcji (wzór (5.5)).

Następnie w rozdziale 6 stosujemy uzyskane rezultaty do konstrukcji przykładów metryk z całkowalnymi potokami geodezyjnymi. Dowodzimy Twierdzenie 6.1.1 o zupełnej całkowalności potoków geodezyjnych metryki normalnej oraz metryki indukowanej przez operator bezwładności $\mathrm{n}\,|_{\mathfrak{k}^\perp}$, przy założeniu spełnienia warunków Twierdzenia 5.4.1. Zauważamy, że wśród przykładów G-niezmienniczych $(1,1)$-tensorów Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych G/K, związanych z listą Onishchika, zawarte są serie $(\mathfrak{g}(k),\mathfrak{g}_1(k),\mathfrak{g}_2(k))$, dla których obie pary $(\mathfrak{g}(k),\mathfrak{g}_1(k))$ i $(\mathfrak{g}(k),\mathfrak{g}_2(k))$ spełniają warunki (5.6) Twierdzenia 5.4.1 (algebra Liego $\mathfrak{k}$ grupy Liego K jest to $\mathfrak{g}_1(k)\cap\mathfrak{g}_2(k)$). W celu zastosowania Twierdzenia 6.1.1 do dowodu zupełnej całkowalności potoków geodezyjnych należy upewnić się, że działanie G na $T^*(G/K)$ jest lokalnie swobodne. Dowód Twierdzenia 6.2.2 pokazuje, że istotnie ma to miejsce, stąd zachodzi zupełna całkowalność potoków geodezyjnych metryki normalnej oraz metryki indukowanej przez odpowiedni operator bezwładności. W podrozdziale 6.5 pokazujemy, że niezbędne warunki Twierdzeń 5.4.1 oraz 6.1.1 są spełnione dla operatora struktury zespolonej J na przestrzeni flag zupełnych G/T, na podstawie czego wnioskujemy, że potok geodezyjny metryki normalnej na tej przestrzeni jest zupełnie całkowalny, przy czym uzyskana rodzina całek pierwszych różni się od znanych w literaturze.

Na zakończenie (rozdział 7) omawiamy kilka szczegółów technicznych oraz możliwe kierunki rozwinięcia badań.

W dodatku A podajemy wzory opisujące formy rzeczywiste algebr Liego $\mathfrak{g}(k),\mathfrak{g}_1(k),\mathfrak{g}_2(k)$ dla serii $(A_{2n-1},C_n,A_{2n-2}\oplus T)$, $(D_{n+1},B_n,A_n\oplus T)$, oraz odpowiadający im operator bezwładności. Ponadto, wskazujemy warunki, względem których operator bezwładności oraz odpowiadająca mu metryka są dodatnio określone.

W dodatku B omawiamy istotną dla operowania ze strukturami typu Kroneckera kwestie kompleksyfikacji obiektów rzeczywistych.

Dla ustalenia notacji oraz wygody czytelnika, dołączamy w dodatku C przegląd używanych pojęć dotyczących grup i algebr Liego, definicje przestrzeni jednorodnej, odwzorowania momentu oraz przytaczamy wykorzystany w Twierdzeniach 4.3.1, 5.4.1 Lemat C.6.3 o bifurkacji.

Rozprawa powstała w oparciu o artykuł:

[LP19] Konrad Lompert, Andriy Panasyuk, *Invariant Nijenhuis Tensors and Integrable Geodesic Flows*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 15 (2019), 056, 30 pages.

Wyniki badań przedstawione w podrozdziałach 6.3, 6.4, 6.5 nie były wcześniej publikowane.

Przegląd literatury

Poniżej przedstawiamy przegląd metod konstrukcji i przykładów zupełnie całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych (i związanych z nimi przestrzeniach podwójnie ilorazowych).

W [Arn66] V. Arnold zauważył, że na dowolnych algebrach Liego można rozważać równania analogiczne do równań Eulera, opisujące równania ruchu bryły sztywnej (więcej w podrozdziale 2.4). S. Manakov [Man76] uogólnił równania Eulera na algebrze Liego $\mathfrak{o}(n)$ grupy Liego $O(n)$ oraz wskazał jawną postać całek ruchu. Posłużył do tego operator bezwładności na algebrze Liego $\mathfrak{g}$, który w ogólnej postaci może być zapisany jako:

$$\varphi_{a,b,D}(z) = \begin{cases} \mathrm{ad}_a^{-1}|_{\mathfrak{m}}(\mathrm{ad}_b z) & z \in \mathfrak{m} \\ Dz & z \in \mathfrak{k} \end{cases}, \tag{0.1}$$

dla pewnych $a, b \in \mathfrak{g}$, podalgebry Liego $\mathfrak{k}$ w $\mathfrak{g}$, oraz podprzestrzeni $\mathfrak{m}$ dopełniającej do $\mathfrak{k}$ w $\mathfrak{g}$ i symetrycznego endomorfizmu $D : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$.

Następnie A. Mishchenko i A. Fomenko w [MF78a] rozwineli konstrukcję Manakova całek pierwszych do metody przesunięcia argumentu (patrz Przykład 4.2.1). Przy jej użyciu zbudowali przykłady całkowalnych równań Eulera na regularnych orbitach dołączonych zwartych grup Liego. Pozwoliło to na wykazanie ([MF78b]), że na półprostych grupach Liego lewoniezmiennicze metryki związane z całkowalnymi równaniami Eulera zadają zupełnie całkowalne potoki geodezyjne.

W [Thi81] A. Thimm wprowadził metodę łańcucha podalgebr Liego do konstrukcji całek pierwszych w inwolucji. Metoda pozwoliła pokazać, że dowolna G-niezmiennicza funkcja Hamiltona na T^*M zadaje układ zupełnie całkowalny, jeśli M jest jedną z przestrzeni: $G_{p,q}(\mathbb{R}) = SO(n+1)/SO(p) \times SO(q)$ (rzeczywista rozmaitość Grassmanna), $G_{p,q}(\mathbb{C}) = U(n)/U(p) \times U(q)$ (zespolona rozmaitość Grassmanna), $SU(n+1)/SO(n+1)$, $SU(n+1) \times \mathbb{R}/SU(n) \times \mathbb{R}$, $SO(n+1)/SO(n-1)$, $\mathbb{CH}^n = U(n,1)/U(n) \times U(1)$, $U(n+1)/O(n+1)$. W szczególności potok geodezyjny metryki normalnej na dowolnej z wyżej wymienionych przestrzeni jest zupełnie całkowalny.

Później V. Guillemin i S. Sternberg [GS83] badając metode Thimma, znaleźli warunki konieczne na działanie grupy Liego G, aby całki Noether wystarczyły do zupełnej całkowalności dowolnej funkcji G-niezmienniczej. W [GS84] badają klasę przestrzeni, dla których algebra wszystkich funkcji G-niezmienniczych jest przemienna względem nawiasu Poissona, pokazując, że należą do niej przestrzenie posiadające układ zupełnie całkowalny całkami Noether. W szczególności takie przestrzenie ilorazowe spełniają założenia definicji pary Gelfanda (sklasyfikowane w [Kra79]).

W [Mis82] Mishchenko, wykorzystując metody z [MF78b], wykazał zupełną całkowalność potoków geodezyjnych metryki normalnej na zwartych przestrzeniach symetrycznych. Dowód polega na wykazaniu najpierw, że dla takich przestrzeni istnieje nieprzemienna zupełna algebra całek pierwszych, zawierająca funkcje Hamiltona metryki normalnej. A później, że w przypadku półprostych grup Liego oraz ich form rzeczywistych z nieprzemiennej algebry całek pierwszych można wybrać podalgebrę całek będących w inwolucji.

A. Brailov przy użyciu metody przesunięcia argumentu dowiódł w [Bra87] zupełnej całkowalności metryki zadanej przez operator bezwładności (0.1) na przestrzeniach symetrycznych.

Niezależnie od [Mis82] i [Bra87] wykorzystując metodę Thimma i własności odwzorowania momentu K. Ii i S. Watanabe [IiW84] podali zupełny i inwolutywny zbiór całek Noether na przestrzeniach symetrycznych, dowodząc całkowalności potoku geodezyjnego metryki normalnej.

W [Myk87] I. Mykytyuk sklasyfikował pary sferyczne (G, K), dające przestrzenie jednorodne G/K, na których dowolna G-niezmiennicza funkcja Hamiltona daje układ zupełnie całkowalny wyłacznie całkami Noether. Według [Wol07] w przypadku reduktywnych grup Liego definicje pary sferycznej, pary Gelfanda oraz przestrzeni słabo symetrycznej pokrywają się.

Później I. Mykytyuk i A. Stepin [MS00] przedstawili klasyfikację przestrzeni prawie sferycznych, dla takich przestrzeni do całkowalności układu hamiltonowskiego wystarczy dobrać jedną funkcje G-niezmiennicza niezależną od całek Noether. Przykładem takiej przestrzeni jest $SO(n)/SO(n-2)$, dla której całkowalność potoku geodezyjnego została przedstawiona przez Thimma.

G. Paternain i R. Spatzier [PS94] łącząc metodę Thimma z metodą submersji otrzymali przykłady zupełnie całkowalnych potoków na pewnych przestrzeniach niejednorodnych, a dokładniej na przestrzeniach podwójnie ilorazowych z metryką indukowaną przez submersję metryki normalnej. *Przestrzenią podwójnie ilorazową* $G//U$ nazywamy przestrzeń orbit działania podgrupy $U \subset G \times G$ na G, dane działaniem $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$, dla $(g_1, g_2) \in U$, $g \in G$. Przykładem takich przestrzeni są przestrzenie Eschenburga $E_m = SU(3)//U_{1,-1,2m,2m}$, gdzie $U_{k,l,m,p} = \{\exp 2\pi it(\mathrm{diag}(k, l, -k, -l), \mathrm{diag}(p, q, -p, -q)) \mid t \in R\}$.

Y. Bazaikin w artykule [Baz00] kontynuując badanie całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach podwójnie ilorazowych przedstawił algorytm służący do wyznaczenia liczby niezależnych całek pierwszych uzyskanych z metody łańcucha podalgebr.

W [BJ01] A. Bolsinov i B. Jovanović dowiedli całkowalności w sposób nieprzemienny potoku geodezyjnego metryki normalnej na dowolnej przestrzeni jednorodnej G/K, a dla zwartych grup Liego G również potoków metryk związanych z operatorem bezwładności (0.1). Dodatkowo wykazali zupełną całkowalność w sensie Liouville'a potoków geodezyjnych na rozmaitościach Stiefela $SO(n)/SO(k)$ oraz przestrzeniach G/T, gdzie T jest maksymalnym torusem w zwartej półprostej G, rozpatrywane metryki stanowią sumę metryk związanych z operatorem bezwładności (0.1) oraz submersji metryk normalnych.

Autor [Jov02] pokazał, że wychodząc od zwartej rozmaitości Riemanna (Q, g) z zupełnie całkowalnym potokiem geodezyjnym oraz swobodnym działaniem na Q zwartej i spójnej grupy Liego G, można uzyskać zupełnie całkowalny potok geodezyjny metryki submersji na przestrzeni orbit Q/G (przy pewnych założeniach na zbiór punktów regularnych T^*Q). Twierdzenie obejmuje przykłady przestrzeni podwójnie ilorazowych znanych z [PS94] i [Baz00].

W [BJ03] została udowodniona hipoteza Mishchenko–Fomenko [MF78b] dla przypadku funkcji gładkich: jeśli układ hamiltonowski jest całkowalny w sposób nieprzemienny to jest również zupełnie całkowalny przez komutujące całki pierwsze należące do tej samej klasy regularności funkcji. A zatem (dzięki [BJ01]) dla dowolnej przestrzeni jednorodnej G/K potok geodezyjny metryki normalnej jest całkowalny w klasie całek gładkich. (Jest tak również w przypadku przestrzeni podwójnie ilorazowych $G//U$, gdzie $U = K \times H$, dla zwartej grupy G oraz podgrup $K, H \subset G$.) Pozostaje jednak otwarty problem całkowalności przez funkcje wielomianowe względem zmiennych pędu.

Następnie autorzy [BJ04a] rozpatrują związaną z przestrzenią G/K algebrę wielomianów $\mathrm{Ad}K$-niezmienniczych określonych na dopełnieniu do podalgebry $\mathfrak{k}$ w $\mathfrak{g}$ (przy założeniu zwartości grupy Liego G). Jeśli w rozpatrywanej algebrze wielomianów istnieje zupełna komutatywna podalgebra, wówczas para (G, K) nazywana jest *parą całkowalną*. Dla każdej pary całkowalnej potok geodezyjny metryki normalnej jest zupełnie całkowalny, a całki pierwsze są wielomianami względem pędów. Badania pokazały, że parami całkowalnymi są wszystkie orbity reprezentacji dołączonej grup $U(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$, oraz przestrzenie jednorodne postaci $(SO(n), SO(k_1) \times SO(k_2))$ gdzie $k_1, k_2 \geq 0$ i $k_1 + k_2 \leq n$, $(U(n), U(1)^{k_1} \times U(k_2) \times U(k_3))$ gdzie $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ i $k_1 + k_2 + k_3 \leq n$, $(U(n), SO(k))$ gdzie $k \leq n$, $(SO(n_1) \times SO(n_2), SO(k))$ gdzie $k \leq n_1, n_2$, oraz $(U(n_1) \times U(n_2), U(k))$ dla $k \leq n_1, n_2$.

Artykuł [BJ04b] stanowi obszerny przegląd metod i wyników związanych z całkowalnością potoków geodezyjnych, w tym również warunków topologicznych nałożonych na rozmaitość wykluczających możliwość istnienia układu całkowalnego. Nowym wynikiem jest przynależność do klasy par całkowalnych następujących par $(U(n), U(k_1) \times \ldots \times U(k_r))$ $(Sp(n), U(k_1) \times \ldots \times U(k_r))$ oraz $(SU(n), SO(k_1) \times \ldots \times SO(k_r))$, przy założeniu dotyczącym wszystkich przypadków $k_i \leq [(n+1)/2]$ dla $i = 1, \ldots, r$.

W artykule [MP04] wykazano zupełną całkowalność, w klasie funkcji rzeczywistych analitycznych wielomianowych w zmiennych pędu, dwóch rodzin G-niezmienniczych metryk, metryk normalnych oraz metryk związanych z operatorem bezwładności (0.1) na przestrzeniach jednorodnych będących orbitami kodołączonymi reduktywnych grup Liego G.

Autorzy [DGJ09], w oparciu o metodę przesunięcia argumentu, dowiedli zupełną całkowalność potoków geodezyjnych metryk pochodzących od operatora bezwładności (0.1) na przestrzeniach typu $SO(n)/(SO(k_1) \times \ldots \times SO(k_r))$, dla $k_1, \ldots, k_r \leq 2$ przy $k_1 + \ldots + k_r \leq n$. Związany z potokiem układ mechaniczny jest modelem ruchu symetrycznej bryły sztywnej z ustalonym punktem stałym.

W [Jov10] modyfikacja metody przesunięcia argumentu pozwoliła pokazać zupełną całkowalność potoku geodezyjnego metryki normalnej na n-symetrycznej przestrzeni jednorodnej $(K \times \ldots \times K)/\mathrm{diag}(K)$, przy założeniu, że K jest półprostą zwartą grupą Liego.

Artykuł [Myk16] zawiera warunki wystarczające do zupełnej całkowalności, w klasie funkcji rzeczywistych analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu, potoku geodezyjnego metryki normalnej na podorbicie orbity działania dołączonego. Dla zwartej i spójnej grupy Liego G, przestrzeń jednorodną $\tilde{G}/\tilde{K}$ nazywamy *podorbitą orbity działania dołączonego* $G/K = Ad(G)(a)$, jeśli $\tilde{G}/\tilde{K} = Ad(\tilde{G})(a)$, dla pewnego $a \in (1-\sigma^*)\mathfrak{g}$, gdzie σ jest inwolutywnym automorfizmem, a podgrupa $\tilde{G}$ jest grupą Liego punktów stałych tego automorfizmu. Pokazano, że warunki te są spełnione dla grupy $U(n)$ i automorfizmu zadanego przez sprzężenie zespolone co daje całkowalność potoku geodezyjnego na rodzinie przestrzeni jednorodnych $SO(n)/(SO(n_1) \times \ldots \times SO(n_p))$, gdzie $n_1 + \ldots + n_p = n$, (przy $n_i > 1, p > 3$).

W pracy [JSV23] autorzy rozpatrują układ równań Eulera na algebrze Liego pokazując, że jeśli jest on zupełnie całkowalny to pewne rozszerzenia układu do większej półprostej algebry Liego jest również zupełnie całkowalne. W szczególności pozwala odtworzyć przypadek n-symetrycznej przestrzeni z [Jov10].

1 Hamiltonowskie układy mechaniczne

Całkowanie równań różniczkowych bywa zadaniem bardzo trudnym. Pomocne bywają metody geometryczne, pozwalając wyciągnąć wnioski jakościowe dotyczące rozwiązań, a czasami nawet znaleźć poszukiwane rozwiązania. Zastosowanie matematycznych metod formalizmu Hamiltona, bogatych w geometryczne struktury, okazuje się być niezwykle efektywnym narzędziem. Dwa Twierdzenia Liouville'a, o całkowalności i o zachowaniu miary przez potok fazowy, dały początek stosowanym do badania układów mechanicznych - teorii układów całkowalnych i teorii ergodycznej. Okazuje się, że losowo wybrany układ Hamiltona, z prawdopodobieństwem równym jeden nie będzie należał do żadnej z powyższych klas (układów całkowalnych lub ergodycznych, zob. [MM74]), czyni to jeszcze ciekawszymi, z matematycznego punktu widzenia, te układy pochodzące z fizyki, które posiadają specjalne własności. Układy całkowalne, będące głównym tematem niniejszej rozprawy, charakteryzują się możliwością znalezienia globalnych rozwiązań. Przykładami takich układów są m.in. ruch swobodny bryły sztywnej (bąk Eulera, bąk Lagrange'a, bąk Kowalewskiej ([Aud04])), równanie Kortewega–de Vriesa opisujące ruch fali w płytkiej wodzie ([ZF72]), czy też nieliniowe równanie Schrödingera ([ZM74]).

W rozdziale zwięźle wprowadzimy podstawowe pojęcia mechaniki klasycznej w ujęciu Hamiltona. Wyprowadzimy równania Hamiltona z drugiej zasady dynamiki Newtona, przedstawimy opis równań Hamiltona wprowadzając pojęcia nawiasu Poissona, omówimy pojęcie całkowalności układu w sensie Liouville'a oraz Twierdzenie Liouville'a o całkowalności układów w kwadraturach. Wprowadzenie do mechaniki Hamiltona opisujące dokładniej omawiane pojęcia można znaleźć m.in. w [Hal13] oraz klasycznej monografii [Arn78].

1.1 Równania Hamiltona w $\mathbb{R}^{2n}$

Rozważmy $x \in \mathbb{R}$ punkt materialny o masie m, poruszający się po lini prostej pod wpływem siły potencjalnej $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$, o potencjale $U \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dla uproszczenia rozważamy wyłącznie układy autonomiczne, takie w których siła F, a dalej również funkcja Hamiltona H, nie zależy w sposób jawny od parametru, który interpretowalibyśmy jako upływ czasu. Druga zasada dynamiki Newtona zakłada, że ruch punktu x odbywa się zgodnie z równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{1.1}$$

Przyjmując równanie pędu $p := m\dot{x}$ za definicję nowej zmiennej niezależnej, możemy obniżyć rząd równania (1.1) sprowadzając je do układu równań:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{1.2}$$

Wprowadźmy funkcję $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, określoną wzorem:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + U,$$

wówczas równania (1.2) przyjmują postać:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Równania powyższego typu będziemy nazywać *równaniami Hamiltona*, a samą funkcję H *funkcją Hamiltona*, lub krócej *hamiltonianem*.

Niech teraz będzie dany układ n punktów materialnych $x_i \in \mathbb{R}$, o masach m_i, odpowiednio. Przestrzeń konfiguracyjna składa się ze wszystkich położeń punktów $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Razem z możliwymi wartościami pędów $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{R}^n$ stanowi przestrzeń fazową.

Ustalmy funkcję Hamiltona $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, będącą sumą energii kinetycznej $T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i energii potencjalnej $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$H(x,p) = T(x,p) + U(x) \tag{1.3}$$

Jeśli energia kinetyczna, jest formą kwadratową względem zmiennych pędu (współrzędnych przestrzeni fazowej) $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i)^2}{2m_i}$, wówczas taki układ mechaniczny nazywamy *naturalnym*. W rozdziale 2 pokażemy, że każdy naturalny układ mechaniczny zadaje metrykę na przestrzeni konfiguracyjnej.

Powtarzając dla każdej ze współrzędnych procedurę z początku paragrafu, otrzymamy układ Hamiltona składający się $2n$ równań:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.4}$$

Oznaczmy przez ∇H gradient funkcji H rozumiany jako wektor kolumnowy, niech I będzie macierzą jednostkową wymiaru $n\times n$, J skośnie-symetryczną macierzą wymiaru $2n\times 2n$

postaci:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

wtedy układ równań (1.4) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$X = J\nabla H,$$

gdzie $X = (\dot{x}, \dot{p})^T = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n, \dot{p}^1, \ldots, \dot{p}^n)^T$.

1.2 Równania Hamiltona w przestrzeni fazowej

Rozważmy układ składający się z n punktów materialnych w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^3$, oznaczmy wektor opisujący konfigurację układu przez $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{3n}$. Załóżmy, że mamy zadane więzy między punktami, to znaczy dozwolone położenia punktów muszą spełniać pewne zależności opisane równaniami $R_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, R_l(\mathbf{x}) = 0$, załóżmy dodatkowo, że wszystkie równania są funkcjonalnie niezależne. Wówczas przestrzeń wszystkich możliwych konfiguracji $\mathbf{x}$ jest pewną rozmaitością różniczkową wymiaru $k = 3n - l$, zanurzoną w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$, oznaczmy ją przez Q. W ten sposób ewolucję układu n punktów $x^1, \ldots, x^n$ w $\mathbb{R}^3$ możemy rozpatrywać jako ruch jednego punktu q w przestrzeni konfiguracyjnej $Q \subset R^{3n}$.

Lokalny układ współrzędnych $(q^1, \ldots, q^k)$ na Q nazywamy *współrzędnymi uogólnionymi*, wektory styczne do lini współrzędnościowych $\frac{\partial}{\partial q^i}$, $i = 1, \ldots, k$, rozpinają przestrzeń styczną T_qQ do Q w punkcie q. Dowodzi się, że suma teoriomnogościowa $TQ = \bigcup_{q \in Q} T_qQ$, nazywana *wiązką styczną*, również jest rozmaitością różniczkową o lokalnym układzie współrzędnych $(q^1, \ldots, q^k, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^k)$, gdzie druga n-tka odpowiada współrzędnym wektora stycznego w bazie $(\frac{\partial}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q^k})$. *Przestrzenią fazową* nazywamy wiązkę kostyczną $T^*Q = \bigcup_{q \in Q} T_q^*Q$, składającą się z przestrzeni dualnych do T_qQ. Funkcje liniowe $p_1, \ldots, p_k$ na T_qQ określone wzorem $p_i(\frac{\partial}{\partial q^j}) = \delta_{ij}$, gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera, $\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, zadają na T^*Q kanoniczny układ współrzędnych $(q^1, \ldots, q^k, p_1, \ldots, p_k)$, dla uproszczenia notacji będziemy używać oznaczenia (q, p). Współrzędne $p_1, \ldots, p_k$ nazywamy *uogólnionymi zmiennymi pędu*. Ponieważ do pełnego opisu stanu układu mechanicznego potrzebujemy zarówno położeń jak i pędów (lub prędkości), podstawową rozmaitość w formaliźmie hamiltonowskim stanowi przestrzeń fazowa T^*Q.

Definicja 1.2.1. *Strukturą symplektyczną* na rozmaitości M nazywamy 2-formę $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2 T^*M)$, zamkniętą $\mathrm{d}\omega = 0$ oraz niezdegenerowaną, to znaczy spełniającą warunek:

dla dowolnego niezerowego pola wektorowego $X \in \Gamma(TM)$ istnieje $Y \in \Gamma(TM)$ takie, że $\omega(X,Y) \neq 0$.

Można pokazać, że każda wiązka kostyczna $M = T^*Q$, posiada kanonicznie zdefiniowaną strukturę symplektyczną, wynika to z istnienia kanonicznej 1-formy $\theta \in \Gamma(T^*(T^*Q))$ zwanej *formą Liouville'a*, zadanej w sposób następujący: dla dowolnej 1-formy różniczkowej $\varphi \in \Gamma(T^*Q)$ forma θ spełnia $\varphi^*(\theta) = \varphi$, gdzie po lewej stronie równości φ rozumiemy jako odwzorowanie gładkie $\varphi : Q \to T^*Q$. We współrzędnych (q,p) forma Liouville'a ma postać $\theta = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q^i$. Kanoniczną formę symplektyczną ω definiujemy za pomocą $\omega = \mathrm{d}\theta$.

Twierdzenie Darboux, będące podstawowym twierdzeniem geometrii symplektycznej, dowodzi, że każda 2-forma symplektyczna ω lokalnie wygląda jak forma kanoniczna tzn. istnieją współrzędne lokalne $(q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n)$ takie, że $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$.

Szczególną role w geometrii symplektycznej odgrywają *podrozmaitosci lagranżowskie*, tzn. podrozmaitości $L \subset M$ wymiaru $\frac{1}{2}\dim M$ o własności $\omega|_L \equiv 0$. Przykładami lagranżowskich podrozmaitości w T^*Q są wykresy 1-form dokładnych oraz włókna T^*_xQ, przy czym ogół ostatnich tworzy przykład foliacji lagranżowskiej, tzn. foliacji, której liście są podrozmaitościami lagranżowskimi. Uogólnione Twierdzenie Darboux mówi, że każda foliacja lagranżowska z wybraną transwersalną podrozmaitością lagranżowską lokalnie wygląda jak otocznie punktu cięcia zerowego w T^*Q.

Najprostszym przykładem rozmaitości symplektycznej, która nie jest wiązką kostyczną jest dwuwymiarowa sfera S^2 (wyżej wymiarowe sfery nie są już rozmaitościami symplektycznymi). Ogólniej, na dowolnej dwuwymiarowej orientowalnej rozmaitości różniczkowej odpowiednia nieznikająca forma objętości stanowi strukturę symplektyczną.

Zdefiniujemy teraz pewne dwuargumentowe działanie w przestrzeni funkcji gładkich oraz pokażemy, że struktura symplektyczna zadaje takie działanie. Aksjomatyczne sformułowanie definicji nawiasu Poissona i hamiltonowskiego pola wektorowego pozwoli w rozdziale 3 rozszerzyć formalizm Hamiltona na szerszą klasę rozmaitości niż tylko symplektyczne.

Definicja 1.2.2. *Nawiasem Poissona* określonym na rozmaitości M nazywamy to dwuargumentowe odwzorowanie $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ spełniające następujące warunki:

1. skośna-symetria $\{f,g\} = -\{g,f\}$,
2. dwuliniowość $\{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$, $\{\alpha f,g\} = \alpha\{f,g\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. reguła Leibniza $\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$,
4. tożsamość Jacobiego $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.

Jeśli $\{f,g\} = 0$ to mówimy, że funkcje f,g są *w inwolucji*.

Wspomniane wyżej foliacje lagranżowskie w terminach nawiasu Poissona opisują się jako poziomice układu $n = \frac{1}{2}\dim M$ funkcji w inwolucji, które są funkcyjnie niezależne.

Własności 1, 2 i 4 nadają przestrzeni funkcji gładkich strukturę nieskończenie wymiarowej algebry Liego. Ustalając jeden z argumentów, zauważamy iż reguła Leibniza sprawia, że nawias Poissona staje się różniczkowaniem, zatem jest pewnym polem wektorowym.

Definicja 1.2.3. Dowolnej funkcji $H \in C^\infty(M)$ przyporządkowujemy *hamiltonowskie pole wektorowe* X_H zdefiniowane wzorem

$$X_H(f) := \{H, f\},$$

funkcję H nazywamy *hamiltonianem.* Jeśli funkcja f jest stała wzdłuż hamiltonowskiego pola wektorowego X_H, tzn. H i f są w inwolucji, to mówimy, że f jest *całką pierwszą* hamiltonianu H.

Z tożsamości Jacobiego wynika, że mając dane dwie całki pierwsze hamiltonianu f_1, f_2, ich nawias Poissona $\{f_1, f_2\}$ również jest całką pierwszą H. Historycznie, jest to treść twierdzenia udowodnionego przez S.D. Poissona [Poi09], który pierwszy posługiwał się nawisem Poissona używając wyrażenia we współrzędnych $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ na przestrzeni $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Obecność struktury symplektycznej na rozmaitości M pozwala określić w sposób niezmienniczy nawias Poissona. Niezdegenerowana 2-forma ω zadaje izomorfizm $\omega^\flat \colon TM \to T^*M$, $X \mapsto \omega(X, \cdot)$. W ten sposób różniczce $\mathrm{d}H$ dowolnej funkcji $H \in C^\infty(M)$ przyporządkujemy pole wektorowe X_H takie, że $\mathrm{d}H = \omega(X_H, \cdot)$. Zadając $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$, dla dowolnych $f, g \in C^\infty(M)$, otrzymujemy nawias Poissona zwiazany z formą ω, na T^*M z kanoniczną formą symplektyczną otrzymujemy w ten sposób *kanoniczny nawias Poissona*.

W lokalnym układzie współrzędnych hamiltonowskie pole wektorowe przyjmuje postać:

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

stąd krzywa $t \mapsto (q(t), p(t)) \subset T^*M$ jest krzywą całkową pola X_H wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równania Hamiltona:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Równoważnie, równania Hamiltona możemy zapisać wykorzystując nawias Poissona:

$$\dot{q}^i = \{H, q^i\}, \qquad \dot{p}_i = \{H, p_i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.3 Twierdzenie Liouville'a o całkowalności

Pojęcie całkowalności układu jest używane w literaturze matematycznej w kilku różnych aspektach. Poniżej przedstawiamy definicję (zupełnej) całkowalności w sensie Liouville'a. Takie sformułowanie definicji całkowalności zapewnia nie tylko istnienie rozwiązań, ale co bardzo ważne, również możliwość wyznaczenia rozwiązań przez *kwadratury*, czyli wykonując skończoną liczbę operacji algebraicznych i wyznaczania całek funkcji.

Definicja 1.3.1. Mówimy, że układ hamiltonowski $\dot{x} = X_H(x)$ na $2n$-wymiarowej rozmaitości symplektycznej M jest *całkowalny w sensie Liouville'a*, jeśli istnieje n funkcji $f_1, \ldots f_n : M \to \mathbb{R}$, spełniających następujące warunki (przyjmijmy $f_1 = H$):

- funkcje są parami w inwolucji, $\{f_i, f_j\} = 0$ dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, n$,
- różniczki $\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_n$ są liniowo niezależne na pewnym otwartym i gęstym podzbiorze rozmaitości M.

Do zupełnego scałkowania układu $2n$ równań różniczkowych zwyczajnych, zazwyczaj potrzeba znaleźć $2n$ całek pierwszych. Okazuje się jednak, że dla układu hamiltonowskiego na rozmaitości symplektycznej wystarczy znajomość n całek pierwszych.

Zachodzi słynne twierdzenie.

Twierdzenie 1.3.1 (Arnolda–Liouville'a [Arn78])**.** *Niech na $2n$-wymiarowej rozmaitości symplektycznej M będzie dany układ hamiltonowski $\dot{x} = X_H$ całkowalny w sensie Liouville'a. Rozpatrzmy poziomice wyznaczone przez całki pierwsze:*

$$T_a = \{f_1(x) = a_1, \ldots, f_n(x) = a_n;\ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Załóżmy, że różniczki $\mathrm{d}f_i$ są niezależne we wszystkich punktach zbioru T_a, wtedy:

1. *T_a jest gładką rozmaitością niezmienniczą względem potoku X_H,*
2. *jeśli zbiór T_a jest spójny i zwarty, to jest dyfeomorficzny z torusem $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$,*
3. *pole wektorowe X_H określa na T_a ruch prawie okresowy, to znaczy w odpowiednich współrzędnych układ Hamiltona przyjmuje postać:*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \omega_1,\ \ldots,\ \frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}t} = \omega_n, \tag{1.5}$$

   gdzie $\omega_i \in \mathbb{R}$, są stałymi zależnymi od punktu a,

4. *układ równań można scałkować przez kwadratury.*

Dowód ostatniego punktu (patrz np. [Arn78]) polega na konstrukcji specjalnego kanonicznego układu *współrzędnych działanie-kąt*. Zmienne działania odpowiedzialne są za wyznaczenie poziomicy T_a na której odbywa się ruch, zmienne kątowe wyznaczają na torusie T_a ruch wzorem (1.5).

Układ całkowalny w sensie Liouville'a zadaje rozwłóknienie rozmaitości $M = \bigcup T_a$ na poziomice całek pierwszych. Włókno T_a nazywamy *regularnym*, jeśli różniczki $df_1(x), \ldots, df_n(x)$ są liniowo niezależne we wszystkich punktach włókna $x \in T_a$. Tak zadana foliacja tej części rozmaitości symplektycznej, gdzie różniczki $df_1(x), \ldots, df_n(x)$ są liniowo niezależne, jest lagranżowska w sensie podrozdziału 1.2. Zauważmy też, że w ogólności różniczki $df_1(x), \ldots, df_n(x)$ nie są liniowo niezależne na całej rozmaitości oraz że badanie odpowiednich osobliwości stanowi ważny składnik jakościowego badania układu.

2 Potoki geodezyjne

Krzywą geodezyjną na rozmaitości Riemanna nazywamy lokalnie najkrótszą drogę łączącą dwa ustalone punkty lub równoważnie najmniej zakrzywioną linie całkowicie zawartą w rozmaitości. Z punktu widzenia formalizmu Hamiltona geodezyjne są trajektoriami wyznaczonymi przez swobodny i bezwładny ruch punktu na rozmaitości. Zaczniemy od sformułowania definicji potoku geodezyjnego w ujęciu hamiltonowskim. Pokrótce omówimy zasadę Maupertuis pozwalającą dowolny naturalny układ mechaniczny sprowadzić do układu geodezyjnego, przy odpowiedniej modyfikacji metryki. Podamy klasyczne przykłady potoków geodezyjnych całkowalnych w sensie Liouville'a oraz konstrukcje potoków geodezyjnych na grupach dyfeomorfizmów o interesującej interpretacji fizycznej. Przytoczone rozumowania są szerzej opisane w cytowanej już monografii [Arn78] oraz poglądowym artykule poświęconym zagadnieniu całkowalności potoków geodezyjnych [BJ04b].

2.1 Potoki geodezyjne jako układy hamiltonowskie

Niech Q będzie n-wymiarową rozmaitością różniczkową.

Definicja 2.1.1. *Tensorem metrycznym Riemanna* na rozmaitości Q nazywamy $(0,2)$-tensor $\mathrm{g} \in \Gamma(\otimes^2 TM)$, który jest symetryczny, to znaczy $\mathrm{g}(X,Y) = \mathrm{g}(Y,X)$ dla dowolnych $X,Y \in \Gamma(TM)$, oraz dodatnio określony, $\mathrm{g}(X,X) > 0$ dla niezerowego $X \in \Gamma(TM)$.

Linią geodezyjną nazywamy krzywą $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to Q$ spełniającą układ równań różniczkowych drugiego rzędu, zadany przez różniczkowanie kowariantne związane z koneksją Levi-Civity ∇ tensora metrycznego g:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0,$$

W lokalnym układzie współrzędnych $q_1, \dots, q_n$ mamy:

$$\ddot q^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \dot q^j \dot q^k = 0, \quad i,j,k = 1,\dots,n, \tag{2.1}$$

gdzie Γ^i_{jk} są współczynnikami Christoffela koneksji ∇, określonymi przez współczynniki tensora metrycznego $\mathrm{g} = (\mathrm{g}_{ij})$:

$$\Gamma^i_{jk} := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{g}^{im} \left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mj}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathrm{g}_{mk}}{\partial q^j} - \frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^m} \right) \tag{2.2}$$

(tutaj (g^{ij}) są współczynnikami $(2,0)$-tensora g^{-1} odwrotnego do metryki Riemanna g).

Patrząc na krzywą jako na trajektorię ruchu punktu, wyrażenie $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ możemy interpretować jako rzut wektora przyspieszenia krzywej na przestrzeń styczną do rozmaitości konfiguracyjnej Q. Stąd ruch swobodny jest określony przez geometrię rozmaitości. W szczególności Ogólna Teoria Względności zakłada, że zakrzywienie czterowymiarowej czasoprzestrzeni jest przejawem grawitacji, a ponadto trajektorie ruchu są krzywymi geodezyjnymi.

Rozpatrzmy funkcję Hamiltona $H \in C^{\infty}(T^*Q)$ będącą formą kwadratową, hamiltonian takiej postaci definiuje energię kinetyczną układu mechanicznego. W kanonicznym układzie współrzędnych (q,p) mamy:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} p_i p_j. \tag{2.3}$$

Wykorzystując przekształcenie zmiennych $\dot{q}^i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{g}^{ij} p_j$ oraz definicje symboli Christoffela (2.2), równanie lini geodezyjnych (2.1) sprowadza się do równań Hamiltona na przestrzeni fazowej T^*Q:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{2.4}$$

Niech (Q,g) będzie rozmaitością Riemanna. Wiązka kostyczna T^*Q wyposażona w standardową strukturę symplektyczną pozwala rozpatrywać hamiltonowskie pole wektorowe X_H. Oznaczmy przez $\gamma_{(q,p)}$ krzywą całkową pola X_H przechodzącą przez $(q,p) \in T^*Q$ dla $t=0$.

Definicja 2.1.2. *Potokiem geodezyjnym* na rozmaitości Riemanna (Q,g) nazywamy jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów wiązki kostycznej $\Phi^t \colon T^*Q \to T^*Q$, $\Phi^t(q,p) = \gamma_{(q,p)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, gdzie $\gamma_{(q,p)}$ jest krzywą całkową hamiltonowskiego pola wektorowego X_H, z hamiltonianem H określonym przez tensor metryczny g wzorem (2.3).

Można pokazać, że przez kanoniczne rzutowanie $\pi \colon T^*Q \to Q$ orbity potoku geodezyjnego, czyli w istocie krzywe całkowe pola X_H, przechodzą na linie geodezyjne koneksji Levi-Civity metryki g.

2.2 Zasada najmniejszego działania Maupertuis

Powyżej opisaliśmy w jaki sposób trajektoria punktu wyznaczona przez energię kinetyczną może być rozumiana jako krzywa geodezyjna. Okazuje sie, że po pewnych przekształceniach, badanie rozwiązań naturalnego układu mechanicznego sprowadza się do badania potoku geodezyjnego w ujęciu hamiltonowskim. Przypomnijmy, że przez naturalny układ mechaniczny rozumiemy równania Hamiltona, gdy hamiltonian $H = T + U$, jest sumą energii kinetycznej $T = T(q,p)$ i energii potencjalnej $U = U(q)$.

Ustalmy wartość $H(q,p) = h_0$ i ograniczmy rozważania do obszaru przestrzeni Q, w którym zachodzi nierówność $U < h_0$. Stosując zasadę najmniejszego działania Maupertuis można pokazać, że trajektorie pola X_H są geodezyjnymi metryki $\tilde{g}$ (nazywanej w literaturze *metryką Jacobiego*, zob. [AKN06]), powstałej przez przeskalowanie wyjściowej metryki:

$$\tilde{g}_{ij} = 2(h - U(q))g_{ij}.$$

Oznacza to również, że trajektorie hamiltonowskich pól wektorowych $X_H, X_{\tilde{H}}$ z funkcjami hamiltona, odpowiednio:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} p_i p_j + U(q) \quad \text{oraz} \quad \tilde{H} = \frac{1}{2(h_0 - U)}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} p_i p_j$$

pokrywają się na rozpatrywanym obszarze.

Dokładniejszy opis zastosowania Zasady Maupertuis do problemu całkowalności potoków geodezyjnych można znaleźć w artykule [BKF95], gdzie autorzy wykorzystali zasadę Maupertuis do konstrukcji układów całkowalnych w sensie Liouville'a na dwuwymiarowej sferze, które odpowiadają całkowalnym przykładom układu mechanicznego bryły sztywnej.

2.3 Klasyczne przykłady całkowalnych potoków geodezyjnych

Historycznie znane było niewiele przykładów całkowalnych w sensie Liouville'a potoków geodezyjnych, po krótce omówimy trzy najbardziej znane.

Pierwszy nietrywialny przykład znalazł A. Clairaut około roku 1733 (opublikowany w zbiorze prac [Cla]), dowodząc zachodzenie równości zwanej dziś *relacją Clairaut*. Rozpatrzmy ruch swobodny punktu po powierzchni obrotowej $S \subset \mathbb{R}^3$ o osi symetrii OZ. Przyjmując układ współrzędnych walcowych (r, φ, z) powierzchnia zadaje się wykresem funkcji $r = r(z)$, a hamiltonian dany przez energię kinetyczną wyrażony w lokalnych współrzędnych $(\varphi, z, p_\varphi, p_z)$ przyjmuje postać

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_z^2}{1 + r'^2_z}\right).$$

Zauważmy, że funkcja H nie zależy w sposób jawny od współrzędnej φ, stąd z równań Hamiltona ($\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$) otrzymujemy prawo zachowania momentu pędu $\dot{p}_\varphi = 0$ względem osi obrotu OZ. W konsekwencji wartość $p_\varphi :\ = r^2\dot{\varphi}$ pozostaje stała wzdłuż rozwiązań układu, a co za tym idzie jest dodatkową (oprócz hamiltonianu) całką pierwszą, czyniąc układ zupełnie całkowalnym. Oznaczając przez α kąt między v wektorem stycznym do trajektorii i południkami powierzchni, mamy $r\dot{\varphi} = |v|\sin\alpha$, wtedy korzystając z otrzymanej równości $r^2\dot{\varphi} = 0$ otrzymujemy dodatkową całkę zwaną relacją Clairaut: $r\sin\alpha = const$.

Kolejny przykład całkowalnego potoku geodezyjnego pochodzi od L. Eulera. W pracy [Eul65] wykazał, że trajektorie układu mechanicznego bryły sztywnej swobodnie obracającej się wokół środka masy (taki układ nazywamy *bąkiem Eulera*), są krzywymi geodezyjnymi lewoniezmienniczej metryki określonej na grupie obrotów trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej $SO(3)$. W podrozdziale 3.5 omówimy bąk Eulera w terminach geometrii Poissona, natomiast w następnym podrozdziale przedstawimy ogólną konstrukcję potoków geodezyjnych na dowolnej grupie Liego.

Do klasycznych przykładów należy również problem całkowalności potoku geodezyjnego na elipsoidzie z trzema nierównymi osiami, C. G. Jacobi [Jac39] wyraził całki pierwsze przez funkcje hipereliptyczne, stosując metodę rozdzielenia zmiennych w eliptycznym układzie współrzędnych. Później, metody geometryczne zastosowane w artykułach [Mos80a, Mos80b], posłużyły do znalezienia wymiernych całek pierwszych w inwolucji dla potoku geodezyjnego na n-wymiarowej elipsoidzie. Wspomniane geometryczne własności kwadryk współogniskowych opierają się na Twierdzeniu Chaslesa: jeśli prosta jest styczna do n współogniskowych kwadryk w $\mathbb{R}^{n+1}$ to w punktach styczności proste normalne do kwadryk są parami prostopadłe.

Dalsze przykłady należą do współczesnych osiągnięć matematyki. W latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku rozwój metod całkowalności układów dynamicznych, spowodował wzrost zainteresowania poszukiwaniem przykładów całkowalnych potoków geodezyjnych. Naturalnymi kandydatami na przestrzenie konfiguracyjne całkowalnych potoków geodezyjnych są rozmaitości z dostatecznie dużą grupą symetrii. Takimi przestrzeniami są grupy Liego oraz związane z nimi przestrzenie ilorazowe, jak na przykład przestrzenie jednorodne. Wynika to z istnienia niezmienniczych torusów (na podstawie Twierdzenia Liouville'a), które wymuszają regularność ewolucji układu dynamicznego, i „prostotę” wewnętrznej geometrii.

2.4 Potoki geodezyjne na grupach Liego

Kluczowym aspektem rozpatrywania ewolucji stanu układu opisującego bryłę sztywną jako ruch wzdłuż linii geodezyjnych na grupie Liego $SO(3,\mathbb{R})$, jest lewoniezmienniczość metryki Riemanna, pozwala to przenieść konstrukcję na inne grupy Liego. Na podstawie [Arn78] omówimy ruch uogólnionej bryły sztywnej w przestrzeni n-wymiarowej, gdzie za przestrzeń konfiguracyjną przyjmiemy dowolną ustaloną grupę Liego G. W mechanice klasycznej kształt bryły sztywnej jest określony przez energię kinetyczną, a zatem przez formę kwadratową tensora metrycznego.

Niech G będzie dowolną grupą Liego, $\mathfrak{g}$ jej algebrą Liego, którą będziemy utożsamiać z przestrzenią styczną T_eG w elemencie neutralnym grupy, standardowo przestrzeń dualną do $\mathfrak{g}$ oznaczamy $\mathfrak{g}^*$. Przez $(\cdot,\cdot)$ będziemy oznaczać parowanie między elementami przestrzeni wektorowej i przestrzeni dualnej, to samo oznaczenie wykorzystamy zarówno dla parowania między elementami algebry Liego $\mathfrak{g}$ i przestrzeni dualnej $\mathfrak{g}^*$, jak i parowania między wektorami przestrzeni stycznej T_gG i kowektorami z T_g^*G.

Niech $A\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ będzie symetrycznym dodatnio określonym operatorem, to znaczy dla dowolnych $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ zachodzi $(A\xi, \zeta) = (A\zeta, \xi)$ oraz $(A\xi, \xi) > 0$ dla $\xi \neq 0$. *Operator bezwładności A* wraz z parowaniem $(\cdot, \cdot)$ określają jednoznacznie iloczyn skalarny ma $\mathfrak{g}$. Miejmy jednak na uwadzę, iż dla półprostych algebr Liego istnieje kanonicznie zadana forma Killinga, którą można wykorzystać do utożsamienia przestrzeni $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}^*$, tak też będziemy czynić w kolejnych rozdziałach.

Metrykę Riemanna na grupie Liego G nazywamy *lewoniezmienniczą*, gdy jest zachowywana przez lewe przesunięcia L_g, dla wszystkich elementów $g \in G$. A zatem lewoniezmiennicza metryka jest jednoznacznie wyznaczona przez iloczyn skalarny określony na $\mathfrak{g} \cong T_eG$.

Istotnie, stosując lewe przesunięcie L_g do operatora A otrzymamy operator $A_g : T_gG \to T_g^*G$, dany wzorem $A_g\xi = L_{g^{-1}}^* A L_{g^{-1},*}\xi$, stąd mamy iloczyn skalarny na T_gG we wszystkich punktach $g \in G$:

$$\langle \xi, \zeta \rangle_g \colon = (A_g\xi, \zeta),$$

a w konsekwencji otrzymujemy lewoniezmienniczą metrykę Riemanna g na G.

Krzywa $t \mapsto \gamma(t)$ na grupie Liego G opisuje ruch bryły, stąd wektor styczny $\dot{\gamma}$ rozumiemy jako wektor prędkości kątowej, a $M\colon = A_g\dot{\gamma} \in T_g^*G$ jako moment pędu bryły. Energię kinetyczną określoną przez wektor prędkości kątowej $\dot{\gamma}$ i operator bezwładności A:

$$T = \frac{1}{2}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_g = \frac{1}{2}(A_g\dot{\gamma}, \dot{\gamma}),$$

możemy wyrazić w zmiennych pędu, otrzymując funkcję Hamiltona na T^*G:

$$H = \frac{1}{2}(M, A_g^{-1}M).$$

A zatem ruch bezwładny uogólnionej bryły sztywnej o przestrzenii konfiguracyjnej G jest krzywą geodezyjną lewoniezmienniczej metryki na grupie G.

Dzięki określeniu operatora bezwładności i niezmienniczości metryki, możemy ograniczyć badanie równań ruchu do przestrzeni $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}^*$, odpowiednio prędkości kątowych i momentów pędu. Dokonując lewych przesunięcia wektorów prędkości kątowej $\dot{\gamma} \in T_gG$ otrzymamy krzywą

$$t \mapsto \omega_c(t) = L_{g^{-1},*}\dot{\gamma} \in \mathfrak{g},$$

opisującą prędkości kątowe w układzie odniesienia stowarzyszonym z bryłą. Działając prawymi przesunięciami dostaniemy krzywą prędkości kątowych w spoczynkowym układzie odniesienia:

$$t \mapsto \omega_s(t) = R_{g^{-1},*}\dot{\gamma} \in \mathfrak{g}.$$

Analogicznie dla momentu pędu $M := A_g\dot{\gamma} \in T_g^*G$ mamy dwie krzywe:

$$t \mapsto M_c(t) = L_g^* M \in \mathfrak{g}^* \quad \text{oraz} \quad t \mapsto M_s(t) = R_g^* M \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.5}$$

Równania różniczkowe, których rozwiązaniami są krzywe (2.5) nazywamy równaniami Eulera uogólnionego ciała sztywnego:

$$\frac{\mathrm{d}M_s}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}M_c}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ad}^*_{\omega_c} M_c.$$

Zauważmy, że pierwsze z równań wyraża prawo zachowania momentu pędu w spoczynkowym układzie odniesienia, składowe wektora M_s są całkami pierwszymi układu. Z relacji $M_s = \mathrm{Ad}^*_g M_c$ wynika, że orbity reprezentacji kodołączonej w $\mathfrak{g}^*$ są niezmienniczymi rozmaitościami potoku określonego przez równania Eulera. Dowodzi się, że równania Eulera na każdej orbicie reprezentacji kodołączonej w $\mathfrak{g}^*$, która jest rozmaitością symplektyczną z kanonicznie zadaną strukturą symplektyczną Kirillova–Kostanta–Suriau, są tożsame równaniom Hamiltona z funkcją Hamiltona $H = \frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c)$.

Równania Eulera można przenieść z przestrzeni sprzężonej $\mathfrak{g}^*$ do algebry Liego $\mathfrak{g}$, stosując odwrotność operatora bezwładności $A^{-1}\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ oraz odwzorowanie $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ zdefiniowane przez tożsamość:

$$\langle [\xi, \zeta], \eta \rangle_e = \langle B(\eta, \xi), \zeta \rangle_e \quad \text{dla dowolnego } \zeta \in \mathfrak{g}.$$

Operator B jest formą antysymetryczną, o wzorze $B(\eta, \xi) = A^{-1}\mathrm{ad}^*_{\eta}(A\xi)$. Orbity reprezentacji kodołączonej przechodzą na rozmaitości niezmiennicze równań Eulera, jednak przeciwnie niż w przypadku równań na $\mathfrak{g}^*$, rozmaitości niezmiennicze zależą również od operatora bezwładności A. Wówczas wektor prędkości kątowej w ciele spełnia *równanie Eulera dla prędkości kątowej*:

$$\frac{\mathrm{d}\omega_c}{\mathrm{d}t} = B(\omega_c, \omega_c).$$

2.5 Potoki geodezyjne na nieskończenie wymiarowych grupach dyfeomorfizmów

W artykule [Arn66] autor pokazał, jak konstrukcja potoków geodezyjnych na grupach Liego przenosi się na nieskończenie wymiarowe grupy dyfeomorfizmów. I tak równania Eulera ruchu bryły sztywnej odpowiadają w hydrodynamice równaniom Eulera ruchu cieczy doskonałej (nieściśliwej i bez lepkości) z grupą G będącą grupą dyfeomorfizmów obszaru przepływu zachowujących element objętości. Nieskończenie wymiarowa grupa G oczywiście nie jest rozmaitością w zwykłym sensie, jednakże poprawność przedstawionych konstrukcji została formalnie pokazana w artykule [EM70] w sposób niezależny od teorii nieskończenie wymiarowych rozmaitości różniczkowych.

Niech D będzie ograniczonym obszarem zawartym w rozmaitości Riemanna (M, g). Oznaczmy przez $\mathrm{SDiff}(D)$ grupę dyfeomorfizmów D, zachowujących ustalony element objętości $d\mu$. Przepływ jednorodnej, doskonałej cieczy w obszarze D, opisuje krzywa $t \mapsto \gamma(t)$ na $\mathrm{SDiff}(D)$.

Algebra Liego $\mathfrak{g}$ składa się z pól wektorowych o znikającej dywergencji w D i stycznych do brzegu obszaru D (o ile brzeg jest niepusty). Na $\mathfrak{g}$ możemy określić iloczyn skalarny:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_D \mathrm{g}(v_1, v_2) d\mu$$

Z Zasady Maupertuis przepływy γ są geodezyjnymi prawoniezmienniczej metryki na grupie $\mathrm{SDiff}(D)$, zdefiniowanej przez formę kwadratową (energię kinetyczną) $T = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle$.

Dla trójwymiarowego obszaru D zachodzi wzór:

$$B(u, v) = \operatorname{rot} u \times v + \operatorname{grad} \alpha,$$

gdzie α jest funkcją dobraną (jednoznacznie z dokładnością do stałej addytywnej) tak, aby $B(u, v) \in \mathfrak{g}$, to znaczy $\operatorname{div} B(u, v) = 0$ oraz $B(u, v)$ było styczne do brzegu ∂D. Wówczas równania Eulera dla prędkości kątowej przyjmują postać taką samą jak w przypadku skończenie wymiarowym: $\dot{v} = -B(v, v)$. Przeciwny znak wynika stąd, że rozpatrujemy metrykę prawoniezmienniczą, w przeciwieństwie do metryki lewoniezmienniczej rozpatrywanej w poprzednim podrozdziale.

Dla grupy $\mathrm{SDiff}(\mathbb{R}^3)$ otrzymujemy z powyższej konstrukcji równania ruchu w postaci Bernoulliego:

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = v \times \operatorname{rot} v + \operatorname{grad} \alpha \,, \qquad \operatorname{div} v = 0.$$

Równanie Eulera dla momentu pędu zostaje wyrażone przez równanie wirowości przepływu:

$$\frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial v} = [v, \operatorname{rot} v].$$

W artykule [KM03] autorzy wykorzystali opisaną powyżej konstrukcję do pokazania, że równanie Kortewega–de Vriesa i równanie Camassy–Holma mają tą samą przestrzeń konfiguracyjną, tak zwaną grupę Virasoro (nakrycie uniwersalne grupy dyfeomorfizmów S^1 zachowujących orientację). Co więcej, oba równania mogą być rozumiane jako potoki geodezyjne na tej samej grupie względem różnych metryk prawoniezmienniczych.

3 Struktury Poissona

Przejdziemy teraz do współczesnego opisu układów hamiltonowskich, wykorzystując pojęcie struktury Poissona, równoważne nawiasowi Poissona (Definicja 1.2.2). Wprowadzimy definicję struktury Poissona, układu całkowalnego w sensie Liouville'a oraz sformułujemy wersję Twierdzenia Liouville'a o całkowalności dla struktur Poissona. Całkowalność zaprezentujemy na przykładzie układu mechanicznego bąku Eulera.

Źródłem dla przedstawionych pojęć dotyczących struktur Poissona są pozycje [Vai94, dSW99]. Opis układu bąku Eulera, jak i wiele innych interesujących przykładów układów mechanicznych, można znaleźć w [MR99].

Omawiane w tym i kolejnych rozdziałach obiekty należą do kategorii obiektów analitycznych w sensie rzeczywistym lub zespolonym. Ustalmy pewne oznaczenia, niech M będzie rzeczywistą lub zespoloną rozmaitością analityczną, wówczas przez $\mathscr{E}(M)$ rozumiemy przestrzeń funkcji analitycznych na M odpowiedniej kategorii. Używamy oznaczenia $\Gamma(E)$ dla przestrzeni cięć wiązki wektorowej E. Przez $\mathbb{K}$ będziemy rozumieć odpowiednie ciało liczb, rzeczywistych lub zespolonych.

3.1 Struktury Poissona jako uogólnienie form symplektycznych

Przypomnijmy, że pole dwuwektorów[1] $\Pi \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ określone na gładkiej rozmaitości M, możemy interpretować jako skośnie-symetryczny morfizm między wiązką kostyczną i wiązką styczną $\Pi\colon T^*M \to TM$.

Definicja 3.1.1. Dwuwektor nazywamy *strukturą Poissona*, jeśli działanie $\{f,g\}^\Pi := \Pi(f)g$ zadaje nawias Poissona na przestrzeni funkcji $\mathscr{E}(M)$ w sensie Definicji 1.2.2.

Przez $\Pi(f) := \Pi(\mathrm{d}f)$ oznaczamy hamiltonowskie pole wektorowe odpowiadające funkcji Hamiltona $f \in \mathscr{E}(M)$.

Definicja 3.1.2. *Rzędem* dwuwektora Π na rozmaitości M nazywamy maksymalny wymiar obrazu $\operatorname{im}\Pi$ morfizmu $\Pi\colon T^*M \to TM$:

$$\operatorname{rank}\Pi := \max_{x\in M} \dim \Pi(T_x^*M).$$

Korząd dwuwektora definiujemy jako $\operatorname{corank}\Pi := \dim M - \operatorname{rank}\Pi$.

Definicja 3.1.3. Oznaczmy zbiór *punktów regularnych* dwuwektora Π:

$$R^\Pi := \{x \in M \mid \dim \Pi(T_x^*M) = \operatorname{rank}\Pi\},$$

[1] Dla uproszczenia będziemy używać terminu dwuwektor.

oraz zbiór *punktów osobliwych*: $\operatorname{Sing}\Pi := M \setminus R^{\Pi}$.

Z ciągłości dwuwektora Π, zbiór punktów regularnych R^{Π} jest zbiorem otwartym w M. Skośna-symetria struktury Poissona wskazuje, że $\operatorname{rank}\Pi$ jest liczbą parzystą. Jeśli rząd jest równy wymiarowi rozmaitości, wówczas strukturę Π nazywamy *niezdegenerowaną*. Każda niezdegenerowana struktura Poissona jest odwrotnością pewnej formy symplektycznej określonej na rozmaitości M. Strukturę Poissona odwrotną do kanonicznej formy symplektycznej na wiązce kostycznej, nazywamy *kanoniczną*.

3.2 Foliacje i dystrybucje

Foliacją (uogólnioną) $\mathscr{F}$ rozmaitości M nazywamy pokrycie $M = \bigcup_{\beta\in B} F_\beta$, spójnymi i rozłącznymi podrozmaitościami immersyjnymi (tzn. dowolny F_β jest obrazem pewnego gładkiego odwzorowania, którego odwzorowanie styczne jest różnowartościowe w dowolnym punkcie). Podrozmaitość $F_\beta \in \mathscr{F}$ nazywamy *liściem foliacji*. Jeśli wszystkie liście foliacji są tego samego wymiaru to foliację nazywamy *regularną* (lub po prostu foliacją). W przeciwnym przypadku foliację nazywamy *uogólnioną*.

Dystrybucją (uogólnioną) D określoną na rozmaitości M nazywamy zbiór $D = \bigcup_{x\in M} D_x$, podprzestrzeni liniowych $D_x \subset T_xM$. Jeśli we wszystkich punktach $x \in M$ wymiary podprzestrzeni D_x są takie same wówczas dystrybucję nazywamy *regularną* (lub po prostu dystrybucją). W przeciwnym przypadku dystrybucję nazywamy *uogólnioną*. Dystrybucję lokalnie rozpiętą przez skończony zbiór gładkich (analitycznych) pól wektorowych $V_1,\dots,V_m$ nazwiemy *gładką* (*analityczną*). Pola te są liniowo niezależne we wszystkich punktach, lub w przypadku dystrybucji uogólnionej w przynajmniej jednym punkcie.

Każda (uogólniona) foliacja zadaje (uogólnioną) dystrybucje, wystarczy przyjąć jako D_x podprzestrzenie styczne do liści $F_\beta \in \mathscr{F}$, we wszystkich punktach $x \in F_\beta$. Gładką uogólnioną dystrybucję D nazywamy *całkowalną*, jeśli jest styczna do pewnej uogólnionej foliacji. Jednakże, nie każda dystrybucja jest całkowalna. Naturalnym warunkiem koniecznym do całkowalności dystrybucji jest jej inwolutywność. Dystrybucję D nazywamy *inwolutywną*, jeśli dla dowolnych pól wektorowych $X,Y \in \Gamma(TM)$ stycznych do D (tzn. $X(x),Y(x) \in D_x$ dla wszystkich $x \in M$) komutator $[X,Y]$ również jest styczny do D. Równoważnie, lokalnie istnieją rozpinające D pola wektorowe $V_1,\dots,V_m \in \Gamma(TM)$ i funkcje f_{ij}^k, dla których $[V_i,V_j] = f_{ij}^k V_k$.

Okazuje się, że dla gładkich regularnych (Twierdzenie Frobeniusa [Fro77]) oraz analitycznych uogólnionych dystrybucji (Twierdzenie Nagano [Nag66]) do całkowalności dystrybucji potrzeba i wystarcza, aby była ona inwolutywna.

Dla uogólnionych dystrybucji założenie analityczności jest istotne, o czym świadczy następujący przykład. Niech $\varphi(x)$ będzie gładką funkcją na $\mathbb{R}$ taką, że $\varphi(x) \equiv 0$ dla $x \le 0$ oraz $\varphi(x) > 0$ dla $x > 0$. Rozważmy uogólnioną dystrybucję rozpiętą przez pola wektorowe

$X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \varphi \frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$. Ponieważ komutator $[X,Y] = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ moze być wyrażony przez kombinację liniową X,Y, więc dystrybucja jest inwolutywna. Zauważmy, że w punktach leżących na osi Y nie istnieją podrozmaitości immersyjne styczne do dystrybucji - proste równoległe do osi X przechodzą w dwuwymiarową półpłaszczyznę.

Po przegląd wyników całkowalności dystrybucji (również dla gładkich dystrybucji uogólnionych) odsyłamy czytelnika do artykułu [Lav18].

3.3 Geometria Poissona

Tożsamość Jacobiego będąca częścią Definicji 1.2.2 nawiasu Poissona pociąga za sobą równość $\Pi(\{f,g\}) = [\Pi(f), \Pi(g)]$. Stąd odwzorowanie:

$$(\mathscr{E}(M), \{\cdot,\cdot\}) \to (\Gamma(TM), [\cdot,\cdot]), \quad f \mapsto \Pi(f)$$

jest homomorfizmem algebr Liego. Zatem (uogólniona) dystrybucja $D_\Pi := \operatorname{im}\Pi$ jest inwolutywna. Jeśli D_Π jest gładka, a rząd struktury Π jest stały lub D_Π jest analityczna, wówczas D_Π jest dystrybucją całkowalną styczną do pewnej (uogólnionej) foliacji. W ogólności też i w przypadku gładkim (niekoniecznie regularnym) dystrybucja D_Π też jest całkowalna, fakt ten został udowodniony w [Kir76].

Definicja 3.3.1. *Dystrybucją charakterystyczną* D_Π struktury Poissona Π na rozmaitości M nazywamy (uogólnioną) dystrybucję zadaną przez obraz morfizmu $\operatorname{im}\Pi \subset TM$.

Definicja 3.3.2. Foliację (uogólnioną) rozmaitości M styczną do dystrybucji charakterystycznej D_Π nazywamy *foliacją charakterystyczną* (lub *symplektyczną*). Podrozmaitości foliacji charakterystycznej nazywamy *liśćmi symplektycznymi*.

Następujące rozważania podają uzasadnienie powyższej terminologii. Ustalmy liść symplektyczny S, styczność hamiltonowskiego pola wektorowego $\Pi(f)$ do S powoduje, że nawias Poissona $\{f,g\}$ zależy tylko od ograniczenia $g|_S$ funkcji g do liścia S. Stąd $\{f|_S, g|_S\} = \{f,g\}|_S$, czyli ograniczenie $\Pi|_S$ jest dobrze określoną niezdegenerowaną strukturą Poissona. Zatem $(S, (\Pi|_S)^{-1})$ jest rozmaitością symplektyczną. Z definicji, zbiór punktów regularnych, R^Π jest sumą teoriomnogościową wszystkich liści symplektycznych maksymalnego wymiaru. Liście symplektyczne niższych wymiarów zawarte są w zbiorze $\operatorname{Sing}\Pi$.

Definicja 3.3.3. Funkcję $f \in \mathscr{E}(U)$ określoną na pewnym otwartym zbiorze $U \subset M$ nazywamy *funkcją Casimira* struktury Poissona Π, jeśli $\Pi(f) \equiv 0$. Zbiór wszystkich funkcji Casimira struktury Π, określonych na zbiorze U będziemy oznaczać przez $Z^\Pi(U)$.

Zauważmy, że zbiór $Z^\Pi(U)$ stanowi centrum algebry Liego $\left(\mathscr{E}(U), \{\,,\}^\Pi\right)$. Ponieważ funkcje Casimira są stałe na liściach symplektycznych, więc dla niezdegenerowanych struktur

Poissona zbiór $Z^{\Pi}(U)$ składa się wyłącznie z funkcji stałych na U. Z drugiej strony, dla zdegenerowanych struktur możemy znaleźć co najwyżej $\operatorname{corank}\Pi$ niezależnych funkcji Casimira.

Dowodzi się, że każda liniowa struktura Poissona na przestrzeni wektorowej, to jest taka, której współczynniki są funkcjami liniowymi, jest związana z pewną algebrą Liego, takie liniowe struktury Poissona nazywamy strukturami *Liego–Poissona*, poniższy przykład prezentuje ich konstrukcję.

Przykład 3.3.1 (Struktura Liego–Poissona)**.** Niech $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ będzie dowolną algebrą Liego, na przestrzeni dualnej $\mathfrak{g}^*$ istnieje struktura Poissona zadana przez nawias Liego wzorem $\{X,Y\}(\alpha) := \alpha([X,Y])$, dla dowolnych $X,Y \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Oznaczmy przez $e_1,\dots,e_n$ bazę przestrzeni $\mathfrak{g}$, przez c_{ij}^k oznaczmy stałe strukturalne, to znaczy liczby takie, że $[e_i,e_j] = c_{ij}^k e_k$, dla $i,j,k = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}$. Wówczas struktura Poissona przyjmuje postać $\Pi_{\mathfrak{g}^*} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$, gdzie $x_k = e_k$ traktujemy jako funkcje liniowe na przestrzeni dualnej $\mathfrak{g}^*$. Zauważmy, że $\operatorname{rank}\Pi_{\mathfrak{g}^*}$ jest równy maksymalnemu wymiarowi orbity działania kodołączonego $\operatorname{ad}^*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$.

Przykład 3.3.2. W szczególności, dla algebry Liego $\mathfrak{so}(3)$ otrzymujemy strukturę Poissona na przestrzeni $\mathfrak{so}(3)^*$ we współrzędnych x,y,z:

$$\Pi_{\mathfrak{so}(3)^*} = 2z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + 2x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ponieważ jedyną funkcją Casimira jest $F = x^2+y^2+z^2$, stąd liście symplektyczne są sferami o wspólnym środku w punkcie $0 \in \mathfrak{so}(3)^*$, oraz sam punkt $\{0\}$ jest również liściem symplektycznym. Zatem zbiór punktów regularnych to $R^{\Pi} = \mathfrak{g}^*\backslash\{0\}$. Zbiór punktów osobliwych $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}^* := \operatorname{Sing}\Pi_{\mathfrak{g}^*} = \{0\}$ składa się z jednego punktu, stąd $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\mathfrak{g}^* = 3$.

3.4 Całkowalność układu hamiltonowskiego w ujęciu poissonowskim

Mówimy, że funkcje $f,g \in \mathscr{E}(M)$ są niezależne w punkcie $x \in M$, jeśli w tym punkcie ich różniczki $\mathrm{d}_x f, \mathrm{d}_x g$ są liniowo niezależne. Dla dowolnego podzbioru $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}(M)$ oznaczmy przez $\operatorname{ddim}_x\mathscr{F}$ maksymalną ilość parami niezależnych funkcji ze zbioru $\mathscr{F}$ w punkcie $x \in M$. Oznaczmy $\operatorname{ddim}\mathscr{F} := \max\limits_{x\in M} \operatorname{ddim}_x\mathscr{F}$.

Definicja 3.4.1. Zbiór funkcji $\mathscr{I} \subset \mathscr{E}(U)$ określonych na zbiorze $U \subset M$ nazywamy *inwolutywnym* ze względu na strukturę Poissona Π, jeśli $\{f,g\}^{\Pi} = 0$ dla dowolnych funkcji $f,g \in \mathscr{I}$ (mówimy wtedy, że funkcje f i g są *w inwolucji*).

Definicja 3.4.2. Inwolutywny zbiór $\mathscr{I} \subset \mathscr{E}(U)$ nazywamy *zupełnym* ze względu na Π, jeśli istnieje dokładnie $s = \dim M - \frac{1}{2}\operatorname{rank}\Pi$ funkcji $f_1,\dots,f_s \in \mathscr{I}$, niezależnych w dowolnym punkcie pewnego otwartego i gęstego podzbioru $U_{\mathscr{I}} \subset U$.

Jeśli zbiór $\mathscr{I}$ funkcji określonych na rozmaitości M, jest zbiorem zupełnym i inwolutywnym, wówczas wśród nich zawiera się $\operatorname{corank}\Pi = \dim M - \operatorname{rank}\Pi$ funkcji Casimira struktury Π. Dowolny taki zbiór $\mathscr{I}$ składa się z funkcji stałych na lagranżowskiej foliacji wymiaru $\frac{1}{2}\operatorname{rank}\Pi$, określonej na otwartym i gęstym zbiorze R^{Π} (tutaj przez foliację lagranżowską rozumiemy foliację, której ograniczenie do dowolnego liścia symplektycznego maksymalnego wymiaru jest lagranżowskie w sensie podrozdziału 1.2).

Wprowadzona powyżej terminologia pozwala zaadaptować Definicje 1.3.1 układu całkowalnego na przestrzeni symplektycznej do ogólniejszej klasy rozmaitości Poissona.

Definicja 3.4.3. Niech Π będzie analityczną strukturą Poissona na rozmaitości M. Mówimy, że hamiltonowski układ jest *zupełnie całkowalny w sensie Liouville'a*, gdy jego ograniczenie do dowolnego liścia symplektycznego maksymalnego wymiaru zawartego w ustalonym z góry zbiorze otwartym gęstym $U \subset M$ jest układem całkowalnym w sensie Liouville'a.

W powyższych terminach zupełna całkowalność oznacza, że hamiltonian układu może być włączony do zupełnej rodziny $\mathscr{I}$ funkcji w inwolucji (przy tym $U = U_{\mathscr{I}}$).

3.5 Bąk Eulera

Przykładem układu mechanicznego, którego zupełna całkowalność była intensywnie badana, jest swobodny ruch obrotowy trójwymiarowej bryły sztywnej. Oznaczmy przez I_1,I_2,I_3 momenty bezwładności bryły względem osi głównych, w tak dobranym układzie współrzędnych, aby tensor bezwładności był diagonalny $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Gdy środek masy pozostaje nieruchomy oraz momenty bezwładności są parami różne $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$, wówczas taki ruch nazywamy *bąkiem Eulera*.

Przestrzeń konfiguracyjna stanowi grupę obrotów rzeczywistej przestrzeni trójwymiarowej $SO(3,\mathbb{R}) = \{x \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) \mid xx^T = \mathrm{Id}\}$. Pokażemy całkowalność w sensie Liouville'a równań bąku Eulera, interpretowanych jako potok geodezyjny na przestrzeni fazowej $M = T^*SO(3,\mathbb{R})$. Energia kinetyczna układu $T(x,\omega) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3)$ jest określona przez wektor prędkości kątowej $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Z Zasady Maupertuis metryka g na $SO(3,\mathbb{R})$ jest zadana przez odpowiadającą energii kinetycznej funkcję Hamiltona na $T^*SO(3,\mathbb{R})$:

$$H(x,J) = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right),$$

gdzie J oznacza moment pędu, związany z prędkością kątową ω przez tensor bezwładności I równaniem $J = I\omega$. Z postaci funkcji H wynika, że metryka g zależy od kształtu bryły oraz jest lewoniezmiennicza, to znaczy niezmiennicza względem obrotów $x \mapsto yx$, dla $x, y \in SO(3,\mathbb{R})$. Zatem, możemy rozpatrywać układ w punkcie neutralnym grupy $e \in SO(3,\mathbb{R})$. Dalej będziemy utożsamiać przestrzeń kostyczną $T_e^*SO(3,\mathbb{R})$ z przestrzenią dualną do algebry Liego $\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$.

W ten sposób problem znalezienia całek pierwszych sprowadzimy z większej rozmaitości symplektycznej $T^*SO(3,\mathbb{R})$ do mniejszej rozmaitości Poissona $\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$.

Oznaczmy przez $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symetryczną formę dwuliniową na $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ (*formę Killinga*), przez $b(\cdot,\cdot)$ odpowiadającą jej formę dwuliniową na przestrzeni dualnej $\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$, po utożsamieniu $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$ przy wykorzystaniu formy Killinga. Wtedy również $\langle I\cdot,\cdot\rangle$ jest formą symetryczną, gdzie $I : \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \to \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $I = \mathrm{diag}(I_1,I_2,I_3)$ jest operatorem bezwładności, niech b_I będzie odpowiadającą $\langle I\cdot,\cdot\rangle$ formą dwuliniową na $\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$. Ograniczenie $h := H_e$ funkcji Hamiltona H do przestrzeni kostycznej $T_e^*SO(3,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$, jest formą kwadratową formy dwuliniowej b_I. Wykorzystując strukturę Liego–Poissona na przestrzeni $\mathfrak{so}^*(3)$, możemy sprowadzić równania Hamiltona na $T^*SO(3,\mathbb{R})$ do równań:

$$\dot{J} = \Pi_{\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})}(h). \tag{3.1}$$

Ze skośnej-symetrii nawiasu Poissona wynika, że Hamiltonian H zawsze jest całką pierwszą układu. Jako dodatkową całkę pierwszą, możemy przyjąć całkowity moment pędu $f = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, który jest funkcją Casimra struktury Liego–Poissona na $\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$. Zatem para niezależnych funkcji h, f tworzy zbiór zupełny ze względu na $\Pi_{\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})}$.

Trajektorie równań (3.1) to przecięcie sfery $f = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ i elipsoidy $2h = \frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}$, stąd po wyznaczeniu J_2, J_3 i wstawieniu do równań ruchu otrzymujemy równanie różniczkowe $\dot{J}_1 = \sqrt{\alpha + \beta J_1^2 + \gamma J_1^4}$, pozwalające obliczyć J_1 w postaci funkcji eliptycznej.

Podsumowując, hamiltonian H oraz F – lewoniezmiennicze rozszerzenie funkcji f do $T^*SO(3,\mathbb{R})$ są dwoma niezależnymi całkami pierwszymi potoku geodezyjnego na przestrzeni fazowej. Do zbudowania układu całkowalnego w sensie Liouville'a potrzebujemy wskazać jeszcze jedną niezależną całkę pierwszą. W tym celu wystarczy wybrać funkcję na $\mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R})$, np. składową momentu pędu J_1 i rozszerzyć w sposób prawoniezmienniczy do funkcji na $T^*SO(3,\mathbb{R})$. Jest tak ponieważ, lewo i prawoniezmiennicze funkcje na $T^*SO(3,\mathbb{R})$ są w inwolucji względem kanonicznego nawiasu Poissona. Istotnie zauważmy, że na poziomie hamiltonowskich pól wektorowych zachodzi równość $\Pi(\{f_l, g_r\}) = [\Pi(f_l), \Pi(g_r)] = 0$ dla dowolnych funkcji $f, g : \mathfrak{so}^*(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, gdzie f_l jest lewoniezmienniczym, a g_r prawoniezmienniczym rozszerzeniem do $T^*SO(3,\mathbb{R})$.

Biorąc pod uwagę izomorfizm algebry Liego $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ z przestrzenią $\mathbb{R}^3$ wyposażoną w iloczyn wektorowy, równania (3.1) możemy zapisać w zmiennych prędkości kątowych $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, otrzymując klasyczne równania Eulera:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3, \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{cases}$$

4 Wprowadzenie do struktur bihamiltonowskich

W tym rozdziale omówimy korzyści wynikające z istnienia dodatkowej (poza kanoniczną) struktury Poissona na rozmaitości. W oparciu o artykuły [Mag78, GZ89, Bol92] wprowadzimy definicję struktury bihamiltonowskiej, kroneckerowskości tejże struktury, oraz zaprezentujemy dwie metody konstrukcji całek pierwszych. Rozdział zakończymy rozważaniami nad redukcją struktur bihamiltonowskich względem działania grupy Liego G, sformułujemy i udowodnimy Twierdzenie 4.3.1 wskazujące warunki jakie musi spełniać pęk struktur Poissona, do znalezienia zupełnej rodziny całek pierwszych w inwolucji.

4.1 Struktury bihamiltonowskie

Definicja 4.1.1 ([Mag78])**.** Dwie struktury Poissona Π_1 i Π_2 na rozmaitości M nazywamy *zgodnymi*, jeśli kombinacja liniowa $\Pi_t := t_1\Pi_1 + t_2\Pi_2$ jest strukturą Poissona dla dowolnych wartości $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2$. Dwuwymiarową rodzinę struktur Poissona (w przypadku, gdy Π_1 i Π_2 są liniowo niezależne) $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$ nazywamy strukturą *bi-Poissona*, *strukturą bihamiltonowską*, lub *pękiem Poissona*.

W artykule [GZ89] I. Gelfand i I. Zakharevich sprowadzili analizę struktur bihamiltonowskich w ustalonym punkcie do badania pęku zespolonych operatorów liniowych.

Twierdzenie 4.1.1 ([GZ89])**.** *(Rozkład Jordana–Kroneckera pary form skośnie-symetrycznych) Niech A, B będą skośnie-symetrycznymi formami dwuliniowymi na zespolonej przestrzeni liniowej V. Wówczas, przy odpowiednim wyborze bazy V, ich macierze mogą być jednocześnie sprowadzone do kanonicznej postaci blokowej:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix},$$

gdzie pary odpowiednich bloków A_i i B_i są jednej z trzech postaci:

- *bloki Jordana dla $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{pmatrix} 0 & J(\lambda) \\ -J(\lambda)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix},$$

- *bloki Jordana dla $\lambda = \infty$:*

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J(0)^T & 0 \end{pmatrix},$$

- *bloki Kroneckera:*

$$\begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & K_2 \\ -K_2^T & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $J(\lambda)$ oznacza klatkę Jordana dla wartości własnej $\lambda \in \mathbb{K}$, a K_1 i K_2 są tak zwanymi klatkami Kroneckera:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}, J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Aby można było opierać się na powyższej klasyfikacji obiekty rzeczywiste musimy poddać kompleksyfikacji. Proces kompleksyfikacji opisujemy w dodatku B, teraz jedynie podamy podstawowe oznaczenia. Dla rzeczywisto analitycznej rozmaitości M przez M^c będziemy oznaczać pewną jej kompleksyfikację. Mając zadany tensor T na M, jego kompleksyfikacja $T^{\mathbb{C}}$ jest holomorficznym tensorem na M^c. Dla rzeczywistej struktury bihamiltonowskiej $\{\Pi_t = t_1\Pi_1 + t_2\Pi_2\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ na M, przez $\Pi_t^{\mathbb{C}}$ oznaczamy kompleksyfikację dowolnej struktury Poissona z pęku. W ten sposób otrzymujemy holomorficzną strukturę bihamiltonowską $\{\Pi_t^{\mathbb{C}} = t_1\Pi_1^{\mathbb{C}} + t_2\Pi_2^{\mathbb{C}} \mid t = (t_1,t_2) \in \mathbb{C}^2\}$ na M^c. W przypadku, gdy M i $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{C}^2}$ są obiektami holomorficznymi będziemy stosować powyższe oznaczenia dla obiektów zespolonych, bez przeprowadzania procedury kompleksyfikacji.

Definicja 4.1.2 ([Zak01])**.** Struktura bihamiltonowska $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$ na M jest *typu Kroneckera w punkcie $x \in M$*, jeśli rząd $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}}(t_1\Pi_1 + t_2\Pi_2)|_x$ jest stały ze względu na parametr $(t_1,t_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (w przypadku rzeczywistym rozpatrujemy $(\Pi_i)_x$ jako skośnie-symetryczną formę dwuliniową na kompleksyfikacji wiązki kostycznej $(T_x^*M)^{\mathbb{C}}$). Mówimy, że $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$ jest *typu Kroneckera*, jeśli jest typu Kroneckera w dowolnym punkcie pewnego otwartego i gęstego podzbioru rozmaitości M.

Terminologia w powyższej definicji jest umotywowana tym, że struktura bihamiltonowska typu Kroneckera ma wyłącznie klatki Kroneckera w rozkładzie Jordana–Kroneckera pary form $(\Pi_i)_x$, $i = 1,2$.

W ogólności pęk Poissona może należeć do jednej z trzech klas, w zależności od bloków wchodzących w skład rozkładu Jordana–Kroneckera:

- typ symplektyczny (rozkład z Twierdzenia 4.1.1 zawiera wyłącznie bloki Jordana), wtedy $\operatorname{rank}\Pi_t = \dim M$ dla prawie wszystkich wartości $t \in \mathbb{K}^2$,

- typ Kroneckera (występują wyłącznie bloki Kroneckera), w konsekwencji dla wszystkich parametrów $t \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ rząd kompleksyfikacji struktur Poissona wchodzących w skład pęku jest stały, $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \Pi_t = const$ nad zbiorem otwartym gęstym w M,
- typ mieszany (zawiera zarówno bloki Kroneckera, jak i bloki Jordana).

Dla obu podstawowych typów struktur bihamiltonowskich (typu symplektycznego i typu Kroneckera) znane są metody budowy rodziny całek pierwszych. Poniżej przedstawimy dwie z nich, z czego w głównej części rozprawy wykorzystamy tą drugą.

4.2 Metody konstrukcji całek pierwszych

Prawie wszystkie struktury Poissona wchodzące w skład pęku Poissona typu symplektycznego są niezdegenerowane. Wynika stąd, że struktura bihamiltonowska jest generowana przez parę zgodnych struktur Poissona, będących odwrotnościami form symplektycznych $\Pi_1 = \omega_1^{-1}$, $\Pi_2 = \omega_2^{-1}$. Rozważmy $(1,1)$-tensor $N := \Pi_2 \circ \omega_1 : TM \to TM$. Okazuje się, że funkcje własne $f_1, \ldots, f_n$ tensora N są w inwolucji względem dowolnego nawiasu Poissona z rozpatrywanego pęku, $\{f_i, f_j\}^{\Pi_t} = 0$, dla wszystkich $t \in \mathbb{K}^2$ ([MCFP97, str. 245]). Czasami niezależnych funkcji własnych jest wystarczająco wiele do zapewnienia zupełnej całkowalności.

W drugim przypadku, dla struktur bihamiltonowskich typu Kroneckera, zbiór składający się z funkcji Casimira wszystkich struktur Poissona wchodzących w skład pęku jest zupełny i inwolutywny - zapewnia o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.1 ([Bol92])**.** *Niech $\{\Pi_t\}_{t \in \mathbb{K}^2}$ będzie strukturą bihamiltonowską typu Kroneckera określoną na rozmaitości M. Wówczas dla dowolnego otwartego zbioru $U \subset M$ takiego, że dla dowolnego $t \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zachodzi $\operatorname{ddim} Z^{\Pi_t}(U) = \dim M - \operatorname{rank} \Pi_t$, zbiór:*

$$Z^{\{\Pi_t\}}(U) := \operatorname{Span}\left(\bigcup_{t \neq 0} Z^{\Pi_t}(U) \right) \tag{4.1}$$

jest zupełnym zbiorem funkcji w inwolucji ze względu na dowolną nietrywialną strukturę Poissona $\Pi_t \neq 0$.

Zauważmy, że aby zachodziła równość $\operatorname{ddim} Z^{\Pi_t}(U) = \dim M - \operatorname{rank} \Pi_t$ dla wszystkich wartości t, zawsze możemy dobrać dostatecznie mały zbiór otwarty U. Jednakże, istotą układów całkowalnych jest ich globalność. Wymaga to wskazania zbioru otwartego i gęstego w rozmaitości M, dla którego wspomniana równość zachodzi, tak też postępujemy w dowodzie Twierdzenia 5.4.1.

Przykład 4.2.1 (Metoda przesunięcia argumentu [MF78a])**.** Zgodnie z Przykładem 3.3.1, na przestrzeni dualnej $\mathfrak{g}^*$ do dowolnej algebry Liego $\mathfrak{g}$, istnieje kanonicznie zdefiniowany nawias Poissona $\{f,g\}(x) = c_{ij}^k x^k \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$. Ponadto, ustalając element $a = (a_i) \in \mathfrak{g}^*$, otrzymujemy dodatkową, stałą strukturę Poissona, daną wzorem $\{f,g\}_a(x) = c_{ij}^k a^k \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$. Można pokazać, że tak zdefiniowane nawiasy Poissona są zgodne, w myśl Definicji 4.1.1, zatem generują strukturę bihamiltonowską $\{\cdot,\cdot\}_\lambda = \{\cdot,\cdot\} + \lambda\{\cdot,\cdot\}_a$ na $\mathfrak{g}^*$, co więcej, struktura ta jest typu Kroneckera przy dodatkowym założeniu $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\mathfrak{g}^* \geq 2$ (założenie to jest spełnione dla szerokiej klasy skończenie-wymiarowych algebr Liego włączającej wszystkie algebry reduktywne). Wówczas konstrukcja z Twierdzenia 4.2.1, daje zbiór zupełny funkcji w inwolucji $\{f(x+\lambda a) \mid \lambda \in \mathbb{K},\ f$ jest niezmiennikiem działania kodołączonego algebry Liego $\mathfrak{g}\}$.

W przypadku pęku Poissona typu symplektycznego nie zawsze odpowiedni zbiór funkcji własnych tensora N jest zupełny. Skrajnie „oddalonym" od takiej sytuacji przypadkiem są przykłady struktur bihamiltonowskich typu symplektycznego, dla których odpowiedni tensor $N := \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$ ma stałe wartości własne. Niemniej jednak nawet dla takiej struktury można zbudować rodzinę funkcji w inwolucji pod warunkiem, że wyjściowa struktura bihamiltonowska jest niezmiennicza względem działania pewnej grupy Liego, gdyż jej redukcja może okazać się strukturą typu Kroneckera. Przykłady takich sytuacji prowadzące do zupełnych układów funkcji w inwolucji były rozważane w [Pan03] (N jest półprosty) oraz w [MP04] (N jest sumą operatora skalarnego i nilpotentnego). W następnym podrozdziale rozpatrujemy szczegółowo taką redukcję przy określonych założeniach, z których będziemy mogli skorzystać w dalszej części pracy.

4.3 Redukcja niezmienniczej struktury bihamiltonowskiej

Niech G będzie grupą Liego działającą na rozmaitości M. Oznaczmy przez $\mathscr{E}^G(M)$ przestrzeń wszystkich funkcji G-niezmienniczych ze zbioru $\mathscr{E}(M)$. Przez $\rho(\xi)$ oznaczamy fundamentalne pole wektorowe działania grupy G odpowiadające $\xi \in \mathfrak{g}$. Mówimy, że struktura bihamiltonowska $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$ jest *G-niezmiennicza*, jeśli każdy z dwuwektorów Π_t jest G-niezmienniczy, jest to równoznaczne z tym, że pochodna Liego $\mathscr{L}_{\rho(\xi)}\Pi_t = 0$, zanika dla dowolnego $\xi \in \mathfrak{g}$.

Załóżmy, że działanie grupy Liego G na M jest właściwe. Jest tak w przypadku gładkiego działania zwartej grupy Liego. Ustalmy podgrupę izotropii $H \subset G$ zadającą *główny typ orbit*, to znaczy dla dowolnego punktu $x \in M$ stabilizator G_x jest sprzężony z H lub wymiar stabilizatora G_x jest większy niż wymiar podgrupy Liego H. Zatem wśród wszystkich orbit działania G na M te o stabilizatorze G_x sprzężonym z H charakteryzują się największym możliwym wymiarem. W tym przypadku zbiór:

$$M_H = \left\{x \in M\colon\, G_x = gHg^{-1} \text{ dla pewnego } g \in G\right\},$$

składa się z sumy wszystkich orbit $G \cdot x$ izomorficznych z przestrzenią jednorodną G/H. Z pracy [DK00, Twierdzenie 2.8.5] wiadomo, że dla stabilizatora orbity typu głównego, zbiór M_H jest otwartym i gęstym podzbiorem w M, a ponadto, że przestrzeń orbit $M'_H := M_H/G$ jest gładką rozmaitością. Istnieje naturalne utożsamienie przestrzeni funkcji $\mathscr{E}^G(M_H)$ z $p^*\mathscr{E}(M'_H)$, gdzie $p\colon M_H \to M'_H = M_H/G$ jest kanonicznym rzutowaniem, w szczególności $\operatorname{ddim}_x \mathscr{E}^G(M) = \operatorname{ddim} \mathscr{E}^G(M)$ dla $x \in M_H$. Ponadto, jeśli na M mamy zadaną G-niezmienniczą strukturę bihamiltonowską $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$, wówczas ograniczenie $\Pi_t|_{M_H}$ do M_H dowolnej struktury Poissona z pęku może być przeniesione na M_H/G przy użyciu rzutu p. To znaczy, istnieje poprawnie określona struktura bihamiltonowska $\{\Pi'_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$ na M_H/G taka, że $\Pi'_t = p_*\Pi_t$ oraz rzutowanie p jest odwzorowaniem Poissona - zachodzi równość:

$$p^*\{f,g\}^{\Pi'_t} = \{p^*f, p^*g\}^{\Pi_t}, \qquad f,g \in \mathscr{E}(M'_H).$$

Zakładając, że zredukowana struktura bihamiltonowska $\{\Pi'_t\}_{t\in\mathbb{K}}$ jest typu Kroneckera, możemy zastosować Twierdzenie 4.2.1 do odpowiednio dobranego zbioru $U \subset M'_H$. Wówczas otrzymamy inwolutywną rodzinę funkcji $Z^{\{\Pi'_t\}}(U)$, zupełną ze względu na dowolną strukturę Poissona Π'_t. W pewnych przypadkach inwolutywny zbiór funkcji $p^*Z^{\{\Pi'_t\}}(U)$ określonych na $p^{-1}(U) \subset M$, może być rozszerzony do zbioru zupełnego. Taki przypadek opisuje Twierdzenie 4.3.1 poniżej. Twierdzenie wskazuje również metodę dowodu kroneckerowskości struktury bihamiltonowskiej $\{\Pi'_t\}_{t\in\mathbb{K}^2}$, sprowadzając problem do obliczenia rzędu skończonej ilości zredukowanych struktur Poissona. Metoda ta była użyta w [MP04, Pan03], ale poniższe twierdzenie jest bardziej precyzyjne, w szczególności dokładnie opisuje zbiór U, na którym odpowiedni układ funkcji jest zupełny.

Twierdzenie 4.3.1 ([LP19])**.** *Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ działającą w sposób właściwy na rozmaitości M i niech $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ będzie G-niezmienniczą strukturą bihamiltonowską. Załóżmy ponadto, że*

- (a) *odpowiednie działanie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ grupy G na M, może być rozszerzone do holomorficznego działania $\rho^c\colon \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \Gamma(TM^c)$ kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ na pewnej kompleksyfikacji M^c rozmaitości M oraz struktura bihamiltonowska $\{\Pi^c_t\}_{t\in\mathbb{C}^2}$ na M^c (zob. dodatek B) jest $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-niezmienniczym holomorficznym rozszerzeniem pęku $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ zdefiniowanym na M^c;*
- (b) *działanie grupy G na zbiorze M_H jest lokalnie swobodne;*
- (c) $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\mathfrak{g}^* \geq 2$*;*
- (d) *dla prawie wszystkich wartości $t \in \mathbb{C}^2$ dwuwektor Π^c_t jest niezdegenerowany oraz działanie ρ^c jest hamiltonowskie ze względu na Π^c_t, to znaczy, istnieje zbiór $E \subset \mathbb{C}^2$ będący sumą skończonej ilości jednowymiarowych podprzestrzeni liniowych $\langle t_1\rangle, \ldots, \langle t_s\rangle$ taki, że* $\operatorname{rank}\Pi^c_t = \dim M$*, $t \in \mathbb{C}^2 \setminus E$, oraz istnieje odwzorowanie (momentu) $\mu^c_t\colon M^c \to \left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)^*$,*

$t \in \mathbb{C}^2 \setminus E$, będące odwzorowaniem Poissona z rozmaitości Poissona (M^c, Π_t^c) na rozmaitość Liego–Poissona $\left((\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*, \Pi_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*}\right)$ takie, że dowolne fundamentalne pole wektorowe $\rho^c(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, jest hamiltonowskim polem wektorowym $\Pi_t^c\left(H_t^{\xi}\right)$ z funkcją Hamiltona $H_t^{\xi}(x) = \langle \mu_t^c(x), \xi \rangle$;

(e) *ograniczenie $\mu_t = \mu_t^c|_M$, $t \in \mathbb{R}^2$, przyjmuje wartości w $\mathfrak{g}^* \subset \left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)^*$, w szczególności działanie ρ jest hamiltonowskie ze względu na Π_t, $t \notin \mathbb{R}^2 \cap E$, to znaczy $\rho(\xi) = \Pi_t\left(H_t^{\xi}|_M\right)$, $\xi \in \mathfrak{g}$.*

Wtedy:

1. *zbiór*

$$U := M_H \setminus \Big(\bigcup_{t \in \mathbb{R}^2} \mu_t^{-1}(\operatorname{Sing} \mathfrak{g}^*) \Big)$$

jest G-niezmienniczy, otwarty i gęsty w M_H;

2. *redukcja struktury bihamiltonowskiej $\{\Pi_t'\}_{t \in \mathbb{R}^2}$ na $M_H' = M_H/G$ jest typu Kroneckera w punkcie $x' \in p(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy[2]:*

$$\operatorname{corank} \Pi_{t_i}'|_{x'} = \operatorname{ind} \mathfrak{g}, \qquad i = 1, \ldots, s;$$

3. *jeśli $\{\Pi_t'\}_{t \in \mathbb{R}^2}$ jest typu Kroneckera oraz $\mathscr{F}$ jest zbiorem zupełnym inwolutywnym funkcji wielomianowych na $(\mathfrak{g}^*, \Pi_{\mathfrak{g}^*})$ (taki zbiór istnieje na podstawie Twierdzenia Sadetova* [Sad04]*), to zbiór funkcji:*

$$\mathscr{I} := p^*\big(Z^{\{\Pi_t'\}}(M_H')\big) \bigcup \mu_{t_0}^* \mathscr{F} \tag{4.2}$$

jest zupełny na M_H ze względu na strukturę Poissona Π_{t_0}, dla dowolnego $t_0 \notin E \cap \mathbb{R}^2$;

4. *ponadto:*

$$p^*\big(Z^{\{\Pi_t'\}_{t \in \mathbb{K}^2}}(p(U))\big) = \operatorname{Span}\Big(\bigcup_{t \neq 0} \mu_t^*\big(Z^{\Pi_{\mathfrak{g}^*}}(\mu_t(U))\big)\Big).$$

Tu $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$*, oznacza indeks algebry Liego $\mathfrak{g}$, to jest kowymiar orbity kodołączonej maksymalnego wymiaru,* $\operatorname{ind} \mathfrak{g} := \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rank} \Pi_{\mathfrak{g}^*}$.

Dowód: Niezmienniczość zbioru U względem działania grupy Liego G wynika z faktu, że odwzorowanie momentu μ_t jest odwzorowaniem Poissona, co jest równoważne temu, że μ_t jest G-ekwiwariantne (względem działania grupy Liego G na orbitach kodołączonych w $\mathfrak{g}^*$), gdyż G-ekwiwariantność μ_t pociąga za sobą G-niezmienniczość zbioru $\mu_t^*(\operatorname{Sing} \mathfrak{g}^*)$.

[2] W przypadku, gdy $t_i \in \mathbb{C}$ pod korzędem $\Pi_{t_i}'|_{x'}$ rozumiemy wartość $\dim M_H'$ minus rząd macierzy zespolonej $\Pi_{t_i}'|_{x'}$ w dowolnej bazie lokalnej, zob. też dowod twierdzenia.

Z Lematu C.6.3 o bifurkacji wynika, że dla dowolnego $x \in M_H$ obraz odwzorowania stycznego do odwzorowania momentu $(\mu_t)_*(T_x M_H)$ pokrywa się z anihilatorem w $\mathfrak{g}^*$ algebry Liego $\mathfrak{g}_x$ stabilizatora G_x punktu x. Z założenia (b) algebra Liego stabilizatora zanika $\mathfrak{g}_x = \{0\}$, stąd rząd $\mu_t(x)$ jest równy $\dim \mathfrak{g}^*$, zatem obraz $\mu_t(M_H)$ zawiera otwarty podzbiór przestrzeni $\mathfrak{g}^*$. Zbiór elementów osobliwych $\operatorname{Sing} \mathfrak{g}^*$ jest zbiorem algebraicznym, jego dopełnienie w $\mathfrak{g}^*$ jest zbiorem otwartym i gęstym, zatem założenie (c) gwarantuje otwartość i gęstość zbioru U.

Aby udowodnić punkt drugi zauważmy, że dla dowolnego $t \neq t_i$, $i = 1, \ldots, s$ oraz dowolnego $x \in M_H$, wykorzystując holomorficzną wersję Lematu o bifurkacji oraz Lemat 4.3.1 poniżej, otrzymujemy równość:

$$\operatorname{corank}((\Pi_t^c)')_x = \operatorname{corank}(\Pi_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*})_{\mu_t^c(x)}.$$

Tu $((\Pi_t^c)')_x$ oznacza ograniczenie dwuwektora $(\Pi_t^c)_x$, rozumianego jako dwuliniowa forma skośnie-symetryczna na $T_x^* M^c$, do anihilatora $(T_x \mathscr{O})^\circ \subset T_x^* M^c$ przestrzeni stycznej $T_x \mathscr{O}$ do orbity $\mathscr{O}$ działania $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, przechodzącej przez punkt x. Przypomnijmy, że przestrzeń $T_x \mathscr{O}$ jest skośnie-ortogonalnym dopełnieniem do włókna zawierającego punkt x odwzorowania μ_t^c.

Ponadto, jeśli $x \in U$, wtedy $\operatorname{corank}_{\mathbb{R}}(\Pi_t')_{p(x)} = \operatorname{corank}_{\mathbb{C}}((\Pi_t^c)')_{p(x)} = \operatorname{ind} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Zatem poddana redukcji struktura bihamiltonowska jest typu Kroneckera w punkcie $p(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w tym punkcie $p(x)$ również dla zdegenerowanych struktur Poissona korzędy redukcji $(\Pi_{t_i})'$ są równe indeksowi $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Punkt trzeci wynika z następującej obserwacji [Pan03, Propozycja 2.22] gdy dana jest para submersji, będących równocześnie odwzorowaniami Poissona: $p_1 \colon (M, \Pi) \to (M_1, \Pi_1)$ oraz $p_2 \colon (M, \Pi) \to (M_2, \Pi_2)$ z włóknami skośnie-ortogonalnymi względem struktury Poissona Π oraz dane są zupełne rodziny funkcji $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ odpowiednio na (M_1, Π_1), (M_2, Π_2), wtedy rodzina funkcji $p_1^*(\mathscr{F}_1) \cup p_2^*(\mathscr{F}_2)$ jest zupełna na (M, Π).

Ostatni punkt wynika stąd, iż przy powyższych oznaczeniach zachodzi pokrywanie się przeciwobrazów $p_1^*(Z^{\Pi_1}) = p_2^*(Z^{\Pi_2})$ [Pan03, Wniosek 2.19]. $\square$

Lemat 4.3.1 ([LP19]). *Niech V oznacza przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$, $\omega \colon V \times V \to \mathbb{K}$ będzie niezdegenerowaną skośnie-symetryczną formą dwuliniową. Oznaczmy przez $\Pi \colon V^* \times V^* \to \mathbb{K}$ dwuwektor będący odwrotnością formy ω. Niech $V_1, V_2 \subset V$ będą podprzestrzeniami wektorowymi, dopełniającymi się względem ω. Wówczas ograniczenie Π do podprzestrzeni $W_1 := V_1^\circ \subset V^*$ oraz ograniczenie do $W_2 := V_2^\circ \subset V^*$ mają równe korzędy.*

Dowód: Istotnie, ponieważ W_1 i W_2 dopełniają się wzajemnie względem Π w sposób ortogonalny, otrzymujemy $\ker(\Pi|_{W_1 \times W_1}) = W_1 \cap W_2 = \ker(\Pi|_{W_2 \times W_2})$. $\square$

5 Struktury bihamiltonowskie generowane przez tensor Nijenhuisa

W tym rozdziale przedstawimy główne wyniki niniejszej pracy. Polegają one na skonstruowaniu struktur bihamiltonowskich na wiązce kostycznej $T^*(G/K)$ do przestrzeni jednorodnej G/K na podstawie niezmienniczych tensorów Nijenhuisa $N : T(G/K) \to T(G/K)$, a następnie na badaniu kroneckerowskości zredukowanych pęków Poissona. Wyniki te pozwolą na zbudowanie nowych całkowalnych potoków geodezyjnych na przestrzeniach jednorodnych w następnym rozdziale.

Pierwszym krokiem ku osiągnięciu obranego celu jest Twierdzenie 5.1.1 wykazujące zachodzenie odpowiedniości między G-niezmienniczymi półprostymi tensorami Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych, a rozkładami odpowiednich algebr Liego na sumy podalgebr. Następnie podajemy szereg przykładów rozkładów algebr Liego, pozwalających na konstrukcję tensorów Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych. Kolejnym etapem jest budowa pęków struktur Poissona przy wykorzystaniu tenora Nijenhuisa oraz budowa relacji między obiektami geometrycznymi i algebraicznymi, pozwalająca w kolejnym kroku na sformułowanie warunków na kroneckerowskość zbudowanego pęku Poissona w terminach algebr Liego (Twierdzenie 5.4.1).

5.1 Niezmiennicze tensory Nijenhuisa na przestrzeniach jednorodnych

Definicja 5.1.1 ([Nij51])**.** Niech M będzie spójną rozmaitością. Pole $(1,1)$-tensorów $N\colon TM \to TM$ nazywamy *tensorem Nijenhuisa*, jeśli jego tensor torsji Nijenhuisa zanika, to znaczy dla dowolnych pól wektorowych $X,Y \in \Gamma(TM)$ zachodzi równość:

$$T_N(X,Y) := [NX,NY] - N[X,Y]_N = 0,$$

gdzie

$$[X,Y]_N := [NX,Y] + [X,NY] - N[X,Y].$$

Załóżmy, że mamy zadane działanie grupy Liego G na rozmaitości M.

Definicja 5.1.2. Mówimy, że pole $(1,1)$-tensorowe $N\colon TM \to TM$ jest *G-niezmiennicze*, jeśli dla dowolnego elementu g grupy Liego G, tensor N komutuje z odwzorowaniem stycznym $g_*\colon TM \to TM$ do dyfeomorfizmu $g\colon M \to M$. Oznacza to przemienność następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{N} & TM \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ TM & \xrightarrow{N} & TM. \end{array}$$

Dystrybucja składająca się z podprzestrzeni $D_x \subset T_xM$ jest *G-niezmiennicza* jeśli dla dowolnych $g \in G$, $x \in M$ zachodzi $g_{*,x}(D_x) = D_{gx}$.

Dla uproszczenia, o obiektach G-niezmienniczych na przestrzeniach jednorodnych (ostanie omawiamy dokładniej w dodatku C.5) będziemy pisać wprost, że są niezmiennicze.

Poniższe lematy wyjaśniają relacje między dystrybucjami generowanymi przez niezmienniczy tensor na przestrzeni jednorodnej (które w przypadku tensora Nijenhuisa są inwolutywne, na mocy Lematu 5.1.4) oraz podalgebrami Liego (Lemat 5.1.2). Lemat 5.1.3 opisuje liście foliacji przestrzeni jednorodnej, generowanej przez inwolutywną niezmienniczą dystrybucję.

Niech G będzie dowolną grupą Liego, K domkniętą podgrupą Liego grupy G, wtedy przestrzeń jednorodna $M = G/K$ jest gładką G-rozmaitością.

Lemat 5.1.1 ([LP19]). *Niech $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$ będzie półprostym G-niezmiennczym $(1,1)$-tensorem. Wówczas funkcje własne tensora N są funkcjami stałymi.*

Dowód: Z G-niezmienniczości tensora N wynika, że również jego funkcje własne są G-niezmiennicze, zatem z tranzytywności działania grupy Liego G na przestrzeni jednorodnej G/K takie funkcje są funkcjami stałymi. □

W dalszej części pracy, funkcje własne G-niezmienniczego tensora na przestrzeni jednorodnej będziemy nazywać wartościami własnymi tensora.

Przypomnijmy, że dla danej rzeczywistej rozmaitości M, przez $T^{\mathbb{C}}M$ oznaczamy kompleksyfikację wiązki stycznej rozmaitości M oraz, dla rzeczywistej algebry Liego $\mathfrak{g}$, przez $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ oznaczamy jej kompleksyfikację.

Lemat 5.1.2 ([LP19]). *Niech G/K będzie rzeczywistą przestrzenią jednorodną. Wówczas zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy G-niezmienniczymi dystrybucjami $D \subset T^{\mathbb{C}}(G/K)$ i podprzestrzeniami $d \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ takimi, że $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \subset d$ oraz $\left[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, d\right] \subset d$, (gdzie $\mathfrak{g}, \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ są algebrami Liego odpowiednio grupy Liego G oraz podgrupy Liego $K \subset G$). Dystrybucja G-niezmiennicza D jest inwolutywna wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń d stanowi podalgebrę Liego w $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Ponadto, dystrybucja D jest rzeczywista, to znaczy, pokrywa się ze swoją sprężoną $D = \overline{D}$ w $T^{\mathbb{C}}(G/K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy również podprzestrzeń $d = \overline{d}$, jest tożsama ze swoją sprzężoną w $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ względem formy rzeczywistej $\mathfrak{g}$.*

Dowód: Oznaczmy przez $P\colon G \to G/K$ kanoniczne rzutowanie, przez L_g działanie lewostronnego mnożenia w grupie Liego G, dla $g, h \in G$, $L_g(h) = gh$. Wpierw pokażemy, że niezmiennicza dystrybucja D na G/K zadaje G-niezmienniczą dystrybucję $\widehat{D} := P_*^{-1}(D) \subset T^{\mathbb{C}}G$. Zauważmy, że niezmienniczość D (przypomnijmy $g_{*,x}(D_x) = D_{gx}$), pociąga za sobą L_g-niezmienniczość $\widehat{D}$, co wskazuje poniższy diagram:

$$\begin{array}{ccc} T_yG & \xrightarrow{L_{g,*}|_y} & T_{gy}G \\ \downarrow P_{*,y} & & \downarrow P_{*,gy} \\ T_x(G/K) & \xrightarrow{g_{*,x}} & T_{gx}(G/K), \end{array}$$

tu L_g oznacza przesunięcie elementu $y \in G$ takiego, że $P(y) = x$.

Ponadto, dystrybucja $\widehat{D}$ jest prawo K-niezmiennicza. Zauważmy, że P jest surjektywną submersją. W otoczeniu punktów $g \in G$ oraz $P(g) \in G/K$ istnieją lokalne układy współrzędnych odpowiednio $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_k)$ i $(x'_1,\ldots,x'_m)$, dla których $P(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_k) = (x'_1,\ldots,x'_m)$. Niech $X_1(x'),\ldots,X_l(x')$, gdzie $X_r(x') = X_r^i(x'_1,\ldots,x'_m)\frac{\partial}{\partial x'_i}$, będą lokalnie liniowo niezależnymi polami wektorowymi na G/K generującymi dystrybucję D. Wówczas dystrybucja $\widehat{D}$ jest generowana przez pola wektorowe $\widehat{X}_r(x) = X_r^i(x_1,\ldots,x_m)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $r = 1,\ldots,l$, oraz pola wektorowe $Y_1,\ldots,Y_k$. Te ostatnie są to fundamentalne pola wektorowe prawego działania podgrupy Liego K na grupie G, są zatem styczne do włókien rzutowania P, lokalnie mogą być liniowo wyrażone przez $\frac{\partial}{\partial y_j}$, i odwrotnie pola $\frac{\partial}{\partial y_j}$ mogą być lokalnie wyrażone przez $Y_1,\ldots,Y_k$. Zauważmy, że $\left[Y_i,\widehat{X}_j\right] = f_{ij}^s Y_s$ dla pewnych funkcji f_{ij}^s, co razem z inwolutywnością układu pól wektorowych $\{Y_1,\ldots,Y_k\}$ daje zawieranie $\left[Y_i,\widehat{D}\right] \subset \widehat{D}$.

Niech $d := \widehat{D}_e \subset T_e^{\mathbb{C}}G$, gdzie $e \in G$ jest elementem neutralnym grupy. Po identyfikacji $T_e^{\mathbb{C}}G \cong \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ niezmienniczość dystrybucji $\widehat{D}$ względem zarówno lewego jak i prawego działania podgrupy Liego K daje $\mathrm{Ad}(K)$-niezmienniczość podprzestrzeni $d \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, co na poziomie infinitezymalnym oznacza $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$-niezmienniczość, czyli $\left[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}},d\right] \subset d$, tu $[\cdot,\cdot]$ jest nawiasem Liego algebry Liego $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Jeśli dystrybucja D jest inwolutywna, wówczas również dystrybucja $\widehat{D}$ jest inwolutywna. Istotnie, układ pól wektorowych $\{X_j\}$, a w konsekwencji również $\{\widehat{X}_j\}$ jest inwolutywny, stąd inwolutywny jest również układ składający się z pól $\{Y_i,\widehat{X}_j\}$. Infinitezymalnie oznacza to, że $[d,d] \subset d$.

I odwrotnie, niech $d \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cong T_e^{\mathbb{C}}G$ będzie $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$-niezmienniczą podprzestrzenią. Zdefiniujmy dystrybucję $\widehat{D} \subset T^{\mathbb{C}}G$ wzorem $\widehat{D}_g = L_{g,*}d$. Tak określona dystrybucja $\widehat{D}$ jest niezmiennicza względem lewego działania grupy G oraz prawego działania grupy K, zatem przez kompleksyfikację odwzorowania stycznego $P_*^{\mathbb{C}}\colon\ T^{\mathbb{C}}G \to\ T^{\mathbb{C}}(G/K)$, rzutuje się na jednoznacznie określoną dystrybucje $D \subset T^{\mathbb{C}}(G/K)$.

Jeżeli podprzestrzeń $d \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ jest podalgebrą, wówczas dystrybucja $\widehat{D}$ jest inwolutywna. Ponadto, z lokalnego opisu wynika, że układ pól wektorowych $\{\widehat{X}_j\}$ jest inwolutywny oraz $P_*\widehat{X}_j = X_j$, co w konsekwencji powoduje, że również układ $\{X_j\}$ jest w inwolucji. Zatem dystrybucja $D \subset T^{\mathbb{C}}(G/K)$ jest inwolutywna.

Z wprowadzonej powyżej identyfikacji, wynika wprost ostatnia teza lematu, równoważność $D = \overline{D} \Leftrightarrow d = \overline{d}$. $\square$

Poniższy lemat zachodzi zarówno w przypadku obiektów rzeczywistych, jak i zespolonych.

Lemat 5.1.3 ([LP19])**.** *Niech $D \subset T(G/K)$ będzie G-niezmienniczą inwolutywną dystrybucją na przestrzeni jednorodnej G/K, zadaną przez podalgebrę Liego $\mathfrak{h}$ w $\mathfrak{g}$, dla której zachodzą zawierania $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Niech $H \subset G$ będzie podgrupą Liego odpowiadającą podalgebrze Liego $\mathfrak{h}$. Oznaczmy przez $P\colon G \to G/K$ kanoniczne rzutowanie. Wówczas:*

1. *liście foliacji stycznej do D są rzutami lewych warstw gH, $g \in G$, ze względu na P,*
2. *dla danego $\xi \in \mathfrak{g}$, fundamentalne pole wektorowe X_ξ działania grupy Liego G na G/K jest styczne do liścia $P(gH)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \in \mathrm{Ad}_g\, \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.*

Dowód: Rozważmy inwolutywną dystrybucję $\widehat{D}$ skonstruowaną jak w dowodzie Lematu 5.1.2. Wówczas foliacja styczna do $\widehat{D}$ pokrywa się z foliacją zadaną przez lewe warstwy gH, $g \in G$. Ponieważ $P_*\big(\widehat{D}\big) = D$, liście odpowiednich foliacji są rzutowane na siebie przez P, co dowodzi punktu pierwszego.

Zauważmy, że prawoniezmiennicze pole wektorowe ξ_R na grupie Liego G, dla którego $\xi_R|_e = \xi$, jest styczne w punkcie $gh \in gH$ do gH wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_R(gh) \in T_{gh}(gH)$, czyli $R_{gh,*}(\xi) \in T_{gh}(gH) = L_{gh,*}\mathfrak{h}$, a więc $\xi \in R_{(gh)^{-1},*}L_{gh,*}\mathfrak{h} = \mathrm{Ad}_{gh}\,\mathfrak{h} = \mathrm{Ad}_g\,\mathfrak{h}$ (tu $\xi \in \mathfrak{g} \cong T_eG$). Zatem fundamentalne pole wektorowe $X_\xi = P_*\xi_R$ jest styczne do liścia $P(gH)$ wtedy i tyko wtedy, gdy $\xi \in \mathrm{Ad}_g\,\mathfrak{h}$. $\square$

Poniższy lemat zachodzi dla dowolnej rozmaitości różniczkowej M, bez konieczności ograniczenia rozważań do przestrzeni jednorodnej.

Lemat 5.1.4 ([LP19])**.** *Niech $N\colon TM \to TM$ będzie półprostym $(1,1)$-tensorem ze stałymi i różnymi wartościami własnymi $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ (lub $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$) oraz niech $D_i \subset T^{\mathbb{C}}M$ (lub odpowiednio $D_i \subset TM$) będą dystrybucjami własnymi odpowiadającymi wartościom własnym λ_i, $i = 1, \ldots, s$. Wówczas tensor N jest tensorem Nijenhuisa ($T_N = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy dystrybucje D_i oraz $D_i + D_j$ są inwolutywne dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, s\}$.*

Dowód: Załóżmy, że dla tensora N zanika torsja Nijenhuisa, $T_N = 0$. Wówczas, z równości $T_N = T_{N-\lambda I}$, zachodzącej dla dowolnych wartości $\lambda \in \mathbb{C}$ wynika, że również $N - \lambda I$, jest tensorem Nijenhuisa, tu przez I oznaczamy odwzorowanie identycznościowe. W szczególności $\big[(N^{\mathbb{C}} - \lambda_i I)X, (N^{\mathbb{C}} - \lambda_i I)Y\big] = \big(N^{\mathbb{C}} - \lambda_i I\big)[X,Y]_{N^{\mathbb{C}}-\lambda_i I}$ dla dowolnych pól wektorowych X, Y. Stąd obraz odwzorowania $N^{\mathbb{C}} - \lambda_i I\colon T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}M$ jest dystrybucją inwolutywną. W konsekwencji dystrybucje, $D_i = \bigcap_{k\neq i} \mathrm{im}\,\big(N^{\mathbb{C}} - \lambda_k I\big)$ oraz $D_i + D_j = \bigcap_{k\neq i,j} \mathrm{im}\,\big(N^{\mathbb{C}} - \lambda_k I\big)$ są inwolutywne.

Z drugiej strony, niech będzie dany rozkład $T^{\mathbb{C}}M = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s$ taki, że dystrybucje $D_i + D_j$ są inwolutywne dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Ponieważ, tensor torsji Nijenhuisa jest dwuliniowy, wystarczy dowieść $T_N(X,Y)=0$ dla dowolnych $X\in\Gamma(D_i)$, $Y\in\Gamma(D_j)$, $1\le i,j\le n$. I istotnie:

$$\begin{aligned}
T_N(X,Y) &= [NX,NY]-N([NX,Y]+[X,NY])+N^2[X,Y]\\
&= \lambda_i\lambda_j([X,Y]_i+[X,Y]_j)-N(\lambda_i([X,Y]_i+[X,Y]_j)\\
&\quad+\lambda_j([X,Y]_i+[X,Y]_j))+N(\lambda_i[X,Y]_i+\lambda_j[X,Y]_j)\\
&= \lambda_i\lambda_j([X,Y]_i+[X,Y]_j)-\left(\lambda_i^2[X,Y]_i+\lambda_i\lambda_j[X,Y]_j+\lambda_i\lambda_j[X,Y]_i+\lambda_j^2[X,Y]_j\right)\\
&\quad+(\lambda_i^2[X,Y]_i+\lambda_j^2[X,Y]_j)=0;
\end{aligned}$$

przez $[X,Y]_i$ oznaczamy i-tą składową komutatora pól wektorowych $[X,Y]$, ze względu na powyższy rozkład. Dowód w przypadku rzeczywistych wartości własnych przebiega tak samo. □

Niech G będzie dowolną grupą Liego, $\mathfrak{g}$ jej algebrą Liego, ustalmy K domkniętą podgrupę Liego w grupie G, o algebrze Liego $\mathfrak{k}$.

Twierdzenie 5.1.1 ([LP19]). *Zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy*

(i) *G-niezmienniczymi półprostymi tensorami Nijenhuisa $N\colon T(G/K)\to T(G/K)$ o parami różnych wartościach własnych $\{\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_{2p}\in\mathbb{C}$, $\lambda_i=\overline{\lambda_{i+p}}$ dla $i=1,\dots,p$ oraz $\lambda_{2p+1},\dots,\lambda_s\in\mathbb{R}$,*

oraz

(ii) *rozkładami $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_s$ kompleksyfikacji algebr Liego $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, na sumę podprzestrzeni spełniających następujące warunki:*

1) $\forall_{i,j\in\{1,\dots,s\},i\neq j}\ \mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$,
2) *indukowany rozkład przestrzeni ilorazowej $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ jest rozkładem na sumę prostą: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}=\left(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)\oplus\cdots\oplus\left(\mathfrak{g}_s/\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)$,*
3) $\forall_{i,j\in\{1,\dots,s\}}\ \mathfrak{g}_i+\mathfrak{g}_j$ *są podalgebrami Liego w $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$,*
4) $\mathfrak{g}_i=\overline{\mathfrak{g}_{i+p}}$ *dla $i=1,\dots,p$ oraz $\mathfrak{g}_j=\overline{\mathfrak{g}_j}$ dla $j=2p+1,\dots,s$.*

Rozkład (ii) zadaje rozkład $T^{\mathbb{C}}(G/K)=D_1\oplus\cdots\oplus D_s$ na inwolutywne podwiązki, a odpowiadający rozkładowi tensor N jest zadany przez ustalenie wartości na dystrybucjach własnych $N|_{D_i}=\lambda_i\,\mathrm{Id}_{D_i}$. Z drugiej strony, mając ustalony tensor N jak w punkcie (i), można zbudować rozkład algebry z punktu (ii) przy wykorzystaniu rozkładu wiązki $T^{\mathbb{C}}(G/K)=D_1\oplus\cdots\oplus D_s$ na dystrybucje własne tensora N.

Dowód: Niech N będzie G-niezmienniczym półprostym tensorem Nijenhuisa na przestrzeni jednorodnej G/K, o wartościach własnych $\{\lambda_1,\dots,\lambda_s;\,\lambda_i\in\mathbb{C},\,\lambda_i\neq\lambda_j,\ \text{dla } i\neq j\}$. Z Lematu 5.1.4 wynika istnienie rozkładu $T^{\mathbb{C}}(G/K)=D_1\oplus\cdots\oplus D_s$ na inwolutywne dystrybucje, które jako przestrzenie własne G-niezmienniczego tensora, są również G-niezmiennicze. Na mocy Lematu 5.1.2 zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między G-niezmienniczymi dystrybucjami D_i oraz podalgebrami Liego $\mathfrak{g}_i$, zawierającymi podalgebrę Liego $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Zatem ma miejsce rozkład $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s$, dla którego $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, dla dowolnych $i \neq j$. Stosując Lemat 5.1.2 do sumy dystrybucji $D_i + D_j$ wnioskujemy, że jest ona inwolutywna wtedy i tylko wtedy, gdy suma podalgebr Liego $\mathfrak{g}_i + \mathfrak{g}_j$ jest podalgebrą Liego.

Własność 3) rozkładu algebry Liego $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ wynika również z Lematu 5.1.2, uwzględniając, że $D_i = \overline{D}_{i+p}$ dla $i = 1, \ldots, p$ oraz $D_j = \overline{D_j}$ dla $j = 2p+1, \ldots, s$.

Dowód w przeciwnym kierunku wynika wprost z powyższej argumentacji, biorąc pod uwagę równoważności w zastosowanych lematach. □

5.2 Przykłady rozkładów algebr Liego

Poniżej prezentujemy przykłady rozkładów algebr Liego, spełniających warunki Twierdzenia 5.1.1, a w konsekwencji generujących niezmienniczy tensor Nijenhuisa na odpowiadającej przestrzeni jednorodnej.

Podobnie, do tensora Nijenhuisa (Definicja 5.1.2), wyróżniamy operator liniowy na dowolnej algebrze Liego $(\mathfrak{g}, [,])$ (por. [KSM90, GS00]), który czasami może być rozszerzony do tensora Nijenhuisa na przestrzeni jednorodnej.

Definicja 5.2.1. Liniowy operator $\mathrm{n} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nazywamy *algebraicznym operatorem Nijenhuisa*, jeśli spełniony jest warunek $T_{\mathrm{n}}(X,Y) := [\mathrm{n}\,X, \mathrm{n}\,Y] - \mathrm{n}([\mathrm{n}\,X, Y] + [X, \mathrm{n}\,Y] - \mathrm{n}[X,Y]) = 0$ dla dowolnych elementów algebry Liego $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Pierwsza seria przykładów jest związana z półprostymi algebraicznymi operatorami Nijenhuisa $\mathrm{n} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, które są $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$-niezmiennicze dla pewnej podalgebry Liego $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, to znaczy zachodzi równość $\mathrm{n} \circ \mathrm{ad}\,k = \mathrm{ad}\,k \circ \mathrm{n}$, dla wszystkich elementów $k \in \mathfrak{k}$. Wówczas $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$-niezmienniczość pozwala rozszerzyć operator n do $(1,1)$-tensora Nijenhuisa N na G/K.

W literaturze znane są dwie główne klasy algebraicznych operatorów Nijenhuisa [KSM90, GS00, Pan14]. Istnieje jeszcze jedna klasa algebraicznych operatorów Nijenhuisa zdefiniowanych na pełnej algebrze macierzowej wzorem $\mathrm{n}\,X = AXB + BAX$, przy założeniu, że $A^2 = B^2 = I$ [OS06], wtedy dla pewnych klas macierzy A, B odpowiadający im operator jest półprosty, klasa ta pozostaje poza zakresem rozważań niniejszej rozprawy. Pierwsza z dwóch głównych klas jest związana jest z rozkładem prostym algebry Liego $\mathfrak{g}$ na dwie podalgebry Liego, druga ma związek z operatorem lewego mnożenia w pełnej algebrze macierzowej $\mathfrak{gl}(n)$. Poniżej rozważamy niektóre przypadki tych dwóch klas.

Przykład 5.2.1. Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego z układem pierwiastków R, zadanym względem podalgebry Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Wychodząc od rozkładu $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ odpowiadającemu układowi pierwiastków R, ustalmy zbiory R^+ oraz R^- odpowiednio dodatnich i ujemnych pierwiastków oraz niech $S \subset \Pi$ będzie dowolnym podzbiorem prostych pierwiastków dodatnich. Oznaczmy przez $[S]$ zbiór dodatnich pierwiastków generowany przez S. Rozważmy rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}^{\perp}$, gdzie $\mathfrak{p} := \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}_\alpha + \sum\limits_{\alpha \in [S]} \mathfrak{g}_\alpha$ jest odpowiadającą paraboliczną podalgebrą Liego oraz $\mathfrak{p}^{\perp} = \sum\limits_{\alpha \in R^+ \setminus [S]} \mathfrak{g}_\alpha$ jest ortogonalnym dopełnieniem do $\mathfrak{p}$, ze względu na formę Killinga, wówczas $\mathfrak{p}^{\perp}$ jest również podalgebrą Liego. Operator liniowy $\mathrm{n} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ zadany wzorem $\mathrm{n}\,|_{\mathfrak{g}_1} = \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_1}$, $\mathrm{n}\,|_{\mathfrak{g}_2} = \lambda_2 \mathrm{Id}\,|_{\mathfrak{g}_2}$, gdzie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p}$ oraz $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{p}^{\perp}$ z dowolnym wyborem wartości własnych λ_1, λ_2 jest algebraicznym operatorem Nijenhuisa (por. [GS00, Pan06]). W tym przykładzie $\mathfrak{k} = 0$, a sam operator n można rozszerzyć do niezmienniczego tensora Nijenhuisa, określonego na grupie Liego G.

Modyfikując powyższy przypadek możemy otrzymać inny rozkład. Wybierając podalgebrę Liego $\mathfrak{k} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^{\text{opposite}}$, gdzie $\mathfrak{p}^{\text{opposite}} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \in -[S] \subset R^-} \mathfrak{g}_\alpha + \sum\limits_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Wówczas operator liniowy n będzie $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$-niezmienniczy, zatem będzie generował G-niezmienniczy tensor Nijenhuisa na przestrzeni jednorodnej G/K, gdzie G, $K \subset G$ są odpowiednimi grupami Liego. Rozkład z Twierdzenia 5.1.1 jest następujący: $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{p}$, oraz $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{p}^{\text{opposite}}$. Dla algebry Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ możemy schematycznie przedstawić rozkłady:

$$\mathfrak{p} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{p}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{p}^{\text{opposite}} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{k} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix},$$

tu odpowiedni zbiór S składa się z jednego pierwiastka $e_2 - e_3$, gdzie $e_i(H)$ jest i-tym elementem diagonalnym macierzy $H \in \mathfrak{h}$.

Przykład 5.2.2. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, rozważmy operator $\mathrm{n} = L_A$, lewego mnożenia przez macierz $A \in \mathfrak{g}$. Wówczas n jest algebraicznym operatorem Nijenhuisa. Wybierając $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, otrzymamy półprosty operator o podprzestrzeniach własnych $\ker(\mathrm{n} - \lambda_i \mathrm{Id})$, składających się z macierzy mających jedynie i-ty wiersz niezerowy. Operator n jest $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$-niezmienniczy dla podalgebry Liego będącej centralizatorem elementu A, $\mathfrak{k} = Z(A)$, składającym się z macierzy diagonalnych. Wówczas, rozkład z Twierdzenia 5.1.1 jest następujący $\mathfrak{g} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i$, gdzie $\mathfrak{g}_i = \ker(\mathrm{n} - \lambda_i \mathrm{Id}) + \mathfrak{k}$ składa się z macierzy o elementach równych zero prawie wszędzie być może z wyjątkiem elementów na diagonali oraz i-tego wiersza.

Powyższy przykład można uogólnić do przypadku dopuszczającego powtarzające się wartości na diagonali macierzy A. Ponadto zamiast algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ można rozpatrywać algebrę Liego macierzy bezśladowych $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$.

Następny klasyczny przykład, nawiązuje do dokładnie opisanego w literaturze operatora struktury zespolonej, na orbicie dołączonej zwartej grupy Liego. Poniżej prezentujemy go, używając wprowadzonych wcześniej pojęć - inny opis można znaleźć w [Bes87, Rozdział 8.B].

Przykład 5.2.3. Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną półprostą algebrą Liego z formą Killinga $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ustalmy $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ podalgebrę Cartana oraz $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\limits_{\alpha\in R}\mathfrak{g}_\alpha$ rozkład pierwiastkowy. Dla dowolnego pierwiastka $\alpha\in R$ wybierzmy wektor $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ taki, że $\langle E_\alpha,E_{-\alpha}\rangle=1$ oraz niech $H_\alpha:=[E_\alpha,E_{-\alpha}]$. Wtedy zwarta forma rzeczywista algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest postaci $\mathfrak{u}=\sum\limits_{\alpha\in R^+}\mathbb{R}(\mathrm{i}H_\alpha)+\sum\limits_{\alpha\in R^+}\mathbb{R}(E_\alpha-E_{-\alpha})+\sum\limits_{\alpha\in R^+}\mathbb{R}(\mathrm{i}(E_\alpha+E_{-\alpha}))\subset\mathfrak{g}$, gdzie $R^+\subset R$ jest podzbiorem dodatnich pierwiastków ([Hel01, Twierdzenie 6.3, Rozdział III]). Z [GOV94, Twierdzenie 1.3, Rozdział 6] wiadomo, że centralizator $Z_\mathfrak{u}(a)$ dowolnego (niekoniecznie półprostego) elementu $a\in\mathfrak{u}$ jest postaci $Z_\mathfrak{u}(a)=\sum\limits_{\alpha\in R^+}\mathbb{R}(\mathrm{i}H_\alpha)+\sum\limits_{\alpha\in[S]}\mathbb{R}(E_\alpha-E_{-\alpha})+\sum\limits_{\alpha\in[S]}\mathbb{R}(\mathrm{i}(E_\alpha+E_{-\alpha}))$, gdzie $S\subset R^+$ jest podzbiorem zawartym w zbiorze dodatnich pierwiastków (jak w Przykładzie 5.2.1). Rozważmy liniowy operator $j\colon\mathfrak{u}^\perp\to\mathfrak{u}^\perp$, gdzie $\mathfrak{u}^\perp:=\sum\limits_{\alpha\in R^+\setminus[S]}\mathbb{R}(E_\alpha-E_{-\alpha})+\sum\limits_{\alpha\in R^+\setminus[S]}\mathbb{R}(\mathrm{i}(E_\alpha+E_{-\alpha}))$, zadany następująco: $j(E_\alpha-E_{-\alpha})=\mathrm{i}(E_\alpha+E_{-\alpha})$, $j(\mathrm{i}(E_\alpha+E_{-\alpha}))=-(E_\alpha-E_{-\alpha})$. Zauważmy, że wtedy $j^\mathbb{C}(E_\alpha)=\mathrm{i}E_\alpha$, $j^\mathbb{C}(E_{-\alpha})=-\mathrm{i}E_{-\alpha}$. Ponadto, podprzestrzenie własne $\mathfrak{g}_1':=\sum\limits_{\alpha\in R^+\setminus[S]}\mathbb{C}(E_\alpha)$ oraz $\mathfrak{g}_2':=\sum\limits_{\alpha\in R^+\setminus[S]}\mathbb{C}(E_{-\alpha})$ są podalgebrami Liego, tak samo jak podprzestrzenie $\mathfrak{g}_i:=\mathfrak{g}_i'\oplus\mathfrak{k}^\mathbb{C}$, $\mathfrak{k}=Z_\mathfrak{u}(a)$. Zatem na podstawie Twierdzenia 5.1.1 operator j zadaje niezmienniczą całkowalną strukturę prawie zespoloną na U/K, gdzie U, $K\subset U$ są grupami Liego algebr Liego $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{k}$, odpowiednio. Co prawda, powyżej przedstawiony operator j, nie jest algebraicznym operatorem Nijenhuisa, jednakże przedstawiony rozkład algebry Liego pokrywa się z rozkładem z Przykładu 5.2.1.

Wiadomo (zob. [Wan54, Twierdzenie IV]), że na przestrzeni jednorodnej będącej orbitą działania dołączonego istnieje skończona liczba nie równoważnych struktur zespolonych. Przedstawiony wyżej operator j zadaje jedną z nich, która w podrozdziale 6.5 zostanie wykorzystana do konstrukcji struktury bihamiltonowskiej na $T^*(U/K)$, gdy K jest maksymalnym torusem w U (przypadek $S=\emptyset$).

Poniżej przedstawimy serie przykładów innej natury, nie zawsze związanych z $\operatorname{ad}\mathfrak{k}$-niezmienniczym algebraicznym operatorem Nijenhuisa na algebrze Liego $\mathfrak{g}$. Rozkład przedstawiony w Twierdzeniu 5.1.1 w dalszym ciągu będzie składał się z dwóch składowych, ale niekoniecznie symetrycznych względem inwolucji odwzorowującej $\mathfrak{g}_\alpha$ na $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. To znaczy będziemy rozważać dowolny rozkład $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ na dwie podalgebry Liego (wtedy $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2$). Jednym z możliwych uogólnień Przykładu 5.2.1 jest rozważenie „niesymetrycznych” parabolicznych podalgebr Liego, wówczas ich części wspólne nazywają się *podalgebrami wodorostów* (ang. seaweed subalgebras).

Przykład 5.2.4. Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego, R układem pierwiastków względem ustalonej podalgebry Cartana $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$. Niech $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\limits_{\alpha\in R}\mathfrak{g}_\alpha$ będzie odpowiednim rozkładem pierwiastkowym. Wybierzmy zbiory R^+ oraz R^- odpowiednio dodatnich oraz ujemnych pierwiastków, oraz niech $S,S'\subset\Pi$ będą dowolnymi podzbiorami zawierającymi jedynie proste pierwiastki dodatnie. Wówczas możemy rozważać paraboliczne podalgebry Liego $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in R^-} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha\in[S]} \mathfrak{g}_\alpha$ oraz $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in R^+} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha\in-[S']} \mathfrak{g}_\alpha$. Poniżej przedstawiamy schematyczny przykład rozkładu $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ na paraboliczne podalgebry Liego, gdzie zbiory S oraz S' składają sie z elementów odpowiednio $e_2 - e_3$ oraz $e_1 - e_2$, (zob. Przykład 5.2.1):

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{g}_2 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{k} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

W artykule [Oni62] A. L. Onishchik sklasyfikował wszystkie rozkłady $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ zwartych prostych algebr Liego $\mathfrak{g}$, poniżej w Tabeli 1 przedstawiamy ich listę.

Przykład 5.2.5. Niech $\mathfrak{g}$ będzie zwartą prostą algebrą Liego. Tabela 1 zawiera wszystkie pary podalgebr Liego $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, dla których $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, wraz z możliwymi włożeniami $i' \colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}$, $i'' \colon \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}$, danymi z dokładnością do sprzężenia. Poniżej ψ oznacza reprezentację trywialną, φ_i są reprezentacjami wskazanymi w artykule [Oni62], natomiast T jest oznaczeniem jednowymiarowej algebry Liego.

Tabela 1: Klasyfikacja rozkładów zwartych prostych algebr Liego

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_1$	i'	$\mathfrak{g}_2$	i''	$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$	Zał.
A_{2n-1}	C_n	φ_1	A_{2n-2}	$\varphi_1 + \psi$	C_{n-1}	$n > 1$
A_{2n-1}	C_n	φ_1	$A_{2n-2} \oplus T$	$\varphi_1 + \psi$	$C_{n-1} \oplus T$	$n > 1$
B_3	G_2	φ_2	B_2	$\varphi_1 + 2\psi$	A_1	
B_3	G_2	φ_2	$B_2 \oplus T$	$\varphi_1 + 2\psi$	$A_1 \oplus T$	
B_3	G_2	φ_2	D_3	$\varphi_1 + \psi$	A_2	
D_{n+1}	B_n	$\varphi_1 + \psi$	A_n	$\varphi_1 + \varphi_n$	A_{n-1}	$n > 2$
D_{n+1}	B_n	$\varphi_1 + \psi$	$A_n \oplus T$	$\varphi_1 + \varphi_n$	$A_{n-1} \oplus T$	$n > 2$
D_{2n}	B_{2n-1}	$\varphi_1 + \psi$	C_n	$\varphi_1 + \varphi_1$	C_{n-1}	$n > 1$
D_{2n}	B_{2n-1}	$\varphi_1 + \psi$	$C_n \oplus T$	$\varphi_1 + \varphi_1$	$C_{n-1} \oplus T$	$n > 1$
D_{2n}	B_{2n-1}	$\varphi_1 + \psi$	$C_n \oplus A_1$	$\varphi_1 + \varphi_1$	$C_{n-1} \oplus A_1$	$n > 1$
D_8	B_7	$\varphi_1 + \psi$	B_4	φ_4	B_3	
D_4	B_3	φ_3	B_2	$\varphi_1 + 3\psi$	A_1	
D_4	B_3	φ_3	$B_2 \oplus T$	$\varphi_1 + 3\psi$	$A_1 \oplus T$	
D_4	B_3	φ_3	$B_2 \oplus A_1$	$\varphi_1 + 3\psi$	$A_1 \oplus A_1$	
D_4	B_3	φ_3	D_3	$\varphi_1 + 2\psi$	A_2	
D_4	B_3	φ_3	$D_3 \oplus T$	$\varphi_1 + 2\psi$	$A_2 \oplus T$	
D_4	B_3	φ_3	B_3	$\varphi_1 + \psi$	G_2	

5.3 Struktury bihamiltonowskie związane z tensorem Nijenhuisa

Przejdziemy teraz do opisu konstrukcji dodatkowej (poza kanoniczną) struktury Poissona na wiązce kostycznej związanej z pewnym tensorem Nijenhuisa. Zbadamy własności powstałego pęku Poissona, ze szczególnym uwzględnieniem relacji między geometrycznymi obiektami generowanymi przez zdegenerowane struktury Poissona z pęku, a związanymi z nimi obiektami algebraicznymi. Wykorzystując odwzorowanie momentu obliczymy wymiary liści symplektycznych.

Definicja 5.3.1. Niech Q będzie rozmaitością różniczkową oraz niech $X \in \Gamma(TQ)$. Wówczas *podniesieniem kostycznym pola wektorowego* X nazywamy hamiltonowskie pole wektorowe $\widetilde{X} \in \Gamma(TT^*Q)$ dane wzorem $\widetilde{X} := \Pi(\overline{X})$, gdzie $\Pi = \omega^{-1} = \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p}$ jest kanoniczną niezdegenerowaną strukturą Poissona na T^*Q odwrotną do kanonicznej formy symplektycznej $\omega = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$, a przez $\overline{X}$ oznaczamy funkcję liniową określoną na T^*Q odpowiadającą polu wektorowemu X.

Lokalna charakteryzacja podniesienia kostycznego pola wektorowego X w kanonicznym układzie współrzędnych (q,p) jest następująca: jeśli $X = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}$, wtedy $\overline{X} = X^i(q)p_i$ oraz $\widetilde{X} = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} - p_j\frac{\partial X^j(q)}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$.

Uwaga 5.3.1. Zauważmy, że funkcję $\overline{X}$, pełniącą rolę hamiltonianu, można przedstawić bez wykorzystania układu współrzędnych jako ewaluację $\theta(\widetilde{X})$ kanonicznej 1-formy Liouville'a $\theta = p_i \mathrm{d}q^i$ na polu wektorowym $\widetilde{X}$.

Uwaga 5.3.2. W szczególności, jeśli grupa Liego G o algebrze Liego $\mathfrak{g}$ działa na rozmaitości Q, oraz X_ξ jest fundamentalnym polem wektorowym tego działania odpowiadającym elementowi $\xi \in \mathfrak{g}$, wtedy $\widetilde{X_\xi}$ jest fundamentalnym polem wektorowym działania grupy Liego G na T^*Q, będącym rozszerzeniem kostycznym działania G na Q.

Niech (M,ω) będzie symplektyczną rozmaitością, ω_1 będzie inną formą symplektyczną określoną na M. Wówczas formy ω, ω_1 są zgodne w sensie Poissona (to znaczy, odpowiadające im struktury Poissona $\Pi := \omega^{-1}$, $\Pi_1 := \omega_1^{-1}$ są zgodne) wtedy i tylko wtedy, gdy $(1,1)$-tensor $\widetilde{N} := \Pi_1 \circ \omega \colon TM \to TM$ jest tensorem Nijenhuisa (zob. [MCFP97, Propozycja 7.1]). Ustalmy $\lambda \in \mathbb{K}$, zdefiniujmy strukturę Poissona $\Pi^\lambda := \Pi_1 - \lambda\Pi$, wtedy $\Pi^\lambda = (\widetilde{N} - \lambda I)\Pi$, stąd $\operatorname{im}\Pi^\lambda = \operatorname{im}(\widetilde{N} - \lambda I)\Pi = \operatorname{im}(\widetilde{N} - \lambda I)$, ponieważ Π jest niezdegenerowaną strukturą. Otrzymaliśmy relację pomiędzy dystrybucjami charakterystycznymi struktur Poissona oraz dystrybucjami własnymi tensorów Nijenhuisa. W szczególności udowodniliśmy poniższy lemat.

Lemat 5.3.1. *Podtrzymując powyższe założenia, dodatkowo przyjmijmy, że tensor* $\widetilde{N} := \Pi_1 \circ \omega$ *jest półprosty oraz ma stałe wartości własne*[3] $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. *Niech* $\widetilde{D}_i$, $i = 1, \ldots, s$, *oznaczają dystrybucje własne odpowiadające wartościom własnym* λ_i. *Wówczas foliacja* $\mathscr{F}_i$

[3] Główne zastosowanie wyników tego rozdziału odbywa się w ramach kategorii rzeczywisto analitycznej i zakłada rzeczywiste wartości własne. Niemniej jednak ze względu na wyniki podrozdziału 6.5 dopuszczamy również zespolone wartości własne. W ostatnim przypadku, nie zaznaczając to w sposób jawny przechodzimy do kompleksyfikacji wszystkich obiektów (por. założenie (a) Twierdzenia 4.3.1 oraz jego dowód).

styczna do dystrybucji $\sum\limits_{j\neq i} \widetilde{D}_j$ *pokrywa się z foliacją symplektyczną zdegenerowanej struktury Poissona* Π^{λ_i}.

Zauważmy, że inwolutywność dystrybucji $\sum\limits_{j\neq i} \widetilde{D}_j$ wynika z Lematu 5.1.4.

Następna definicja wskazuje metodę konstrukcji tensora, określonego w sposób jednoznaczny, na wiązce kostycznej T^*Q, wychodząc od tensora zadanego na rozmaitości Q.

Definicja 5.3.2 ([Tur92]). Niech $K\colon TQ \to TQ$ będzie $(1,1)$-tensorem określonym na Q. *Podniesieniem kostycznym tensora* K nazywamy $(1,1)$-tensor $\widetilde{K}\colon TM \to TM$, $M := T^*Q$, zdefiniowany w sposób następujący. Niech $K^t\colon T^*Q \to T^*Q$ będzie odwzorowaniem transponowanym do K, rozumianym jako gładkie odwzorowanie $M \to M$, niech ω oznacza kanoniczną formę symplektyczną na T^*Q, przyjmijmy $\omega_1 := \left(K^t\right)^* \omega$. Wtedy $\widetilde{K} := \omega^{-1} \circ \omega_1$.

Jeśli $\{q^i\}$ jest lokalnym układem współrzędnych na Q i $K = K^i_j(q)\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \mathrm{d}q^j$, to w odpowiednich współrzędnych $\left(q^i, p_i\right)$ na T^*Q otrzymujemy wzór:

$$\widetilde{K} = K^i_j(q)\left(\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \mathrm{d}q^j + \frac{\partial}{\partial p_j} \otimes \mathrm{d}p_i\right) + p_k\left(\frac{\partial K^k_j}{\partial q^i} - \frac{\partial K^k_i}{\partial q^j}\right)\frac{\partial}{\partial q^j} \otimes \mathrm{d}q^i.$$

Gdy po ograniczeniu do dowolnego włókna wiązki stycznej tensor K jest odwracalny, wtedy ma miejsce równość $\widetilde{K^{-1}} = \widetilde{K}^{-1}$.

Lemat 5.3.2 ([Tur92]). *Niech K będzie tensorem określonym na rozmaitości Q, $\widetilde{K}$ jego podniesieniem kostycznym. Wówczas K jest tensorem Nijenhuisa wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{K}$ jest tensorem Nijenhuisa. W skrócie:*

$$T_K = 0 \Longleftrightarrow T_{\widetilde{K}} = 0.$$

W szczególności prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 5.3.3 ([LP19]). *Niech $N\colon TQ \to TQ$ będzie $(1,1)$-tensorem Nijenhuisa odwracalnym po ograniczeniu do dowolnego włókna wiązki TQ, $\Pi := \omega^{-1}$ kanoniczną strukturą Poissona na T^*Q odwrotną do kanonicznej formy symplektycznej ω na T^*Q, oraz niech $\Pi_1 := \widetilde{N} \circ \Pi$. Wtedy para dwuwektorów (Π, Π_1) stanowi parę zgodnych struktur Poissona na T^*Q.*

Dowód: Ponieważ $\widetilde{N} \circ \Pi = \widetilde{N} \circ \omega^{-1} = \left(\omega \circ \widetilde{N}^{-1}\right)^{-1} = \left(\omega \circ \widetilde{N^{-1}}\right)^{-1} = \left(\left((N^{-1})^t\right)^* \omega\right)^{-1} = N^t_* \omega^{-1} = N^t_* \Pi$, więc Π_1 jest strukturą Poissona, jako popchnięcie przez dyfeomorfizm standardowej struktury Poissona. Z poprzedniego Lematu 5.3.2 wynika, że $\widetilde{N}$ jest tensorem Nijenhuisa, a zatem Π i Π_1 są zgodnymi strukturami Poissona. □

Od teraz będziemy zakładać, że tensor N jest odwracalnym półprostym tensorem Nijenhuisa o stałych wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ (rzeczywistych, jeśli pozostałe obiekty należą do kategorii rzeczywistej) o krotnościach odpowiednio $k_1,\dots,k_s$. Niech $D_i \subset TQ$ będzie dystrybucją własną odpowiadającą wartości własnej λ_i. Przez $\widetilde{D}_i \subset TM$ oznaczamy dystrybucję własną $(1,1)$-tensora $\widetilde{N}$ odpowiadającą wartości własnej λ_i (o krotności $2k_i$).

Niech $L(N)$ oznacza algebrę Liego pól wektorowych na Q, zachowujących tensor N, to znaczy $V \in L(N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zanika pochodna Liego $\mathscr{L}_V N = 0$. Dodatkowo niech $\theta = \theta_1 + \dots + \theta_s$ będzie rozkładem kanonicznej 1-formy Liouville'a θ na $M := T^*Q$ odpowiadającym rozkładowi $TM = \widetilde{D}_1 \oplus \dots \oplus \widetilde{D}_s$, to znaczy, $\theta_i|_{\widetilde{D}_i} = \theta|_{\widetilde{D}_i}$ i $\theta_i\big(\sum_{j\neq i} \widetilde{D}_j\big) = 0$.

Lemat 5.3.4 ([LP19])**.** *Przy zachowaniu powyższych założeń zachodzą następujące stwierdzenia.*

1. *Dla dowolnego $i \in \{1,\dots,s\}$ wszystkie liście foliacji symplektycznej $\mathscr{F}_i$ struktury Poissona $\Pi^{\lambda_i} := \Pi_1 - \lambda_i \Pi$ są tego samego wymiaru, kowymiar liści wynosi $2k_i$. Dla dowolnego liścia F obraz $\pi(F)$ względem kanonicznego rzutowania $\pi\colon T^*Q \to Q$ jest liściem foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i := \sum_{j\neq i} D_j$. Liść $\pi(F)$ jest kowymiaru k_i w Q. Dla dowolnego liścia F_0 foliacji stycznej do $\check{D}_i$, zbiór $\pi^{-1}(F_0)$ jest podrozmaitością Poissona w rozmaitości Poissona $\big(T^*Q, \Pi^{\lambda_i}\big)$.*
2. *Pola wektorowe należące do $L(N)$, styczne do dystrybucji D_i stanowią ideał L_i algebry Liego $L(N)$, zachodzi rozkład $L(N) = L_1 \oplus \dots \oplus L_s$.*
3. *Dla ustalonych $i \in \{1,\dots,s\}$ oraz pola wektorowego $V \in L(N)$ o podniesieniu kostycznym $\widetilde{V}$, funkcja $f_V^i := \theta_i\big(\widetilde{V}\big) \in \mathscr{E}(T^*Q)$, jest funkcją Casimira struktury Poissona Π^{λ_i}. W szczególności, f_V^i zależy w sposób liniowy od $V \in L(N)$, zatem dla dowolnego liścia F foliacji $\mathscr{F}_i$ przyporządkowanie $V \mapsto \Phi_F^i(V) := f_V^i|_F$ zadaje liniowy funkcjonał na $L(N)$.*
4. *Jeśli pole $V \in L(N)$ jest styczne do $\pi(F)$, gdzie F jest liściem symplektycznym struktury Poissona Π^{λ_i}, wtedy $\Phi_F^i(V) = 0$.*
5. *Dla ustalonego liścia $F_0 \subset Q$ foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i$, pole wektorowe $V \in L(N)$ jest styczne do F_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\widetilde{V}$ jest styczne do $\pi^{-1}(F_0)$.*

Dowód: Przypomnijmy, że przez k_i oznaczamy krotność wartości własnej λ_i, $i = 1,\dots,s$. Na mocy Lematu 5.1.4 w otoczeniu dowolnego punktu rozmaitości Q istnieje lokalny układ współrzędnych $\big(q^{j_1^1},\dots,q^{j_{k_1}^1},\dots,q^{j_1^s},\dots,q^{j_{k_s}^s}\big)$, gdzie $\big(j_1^1,\dots,j_{k_1}^1,\dots,j_1^s,\dots,j_{k_s}^s\big) = (1,\dots,\dim Q)$ taki, że dystrybucje własne D_i są rozpięte przez pola wektorowe $\frac{\partial}{\partial q^{j_1^i}},\dots,\frac{\partial}{\partial q^{j_{k_i}^i}}$. Wtedy podniesienie kostyczne tensora Nijenhuisa przyjmuje postać:

$$\widetilde{N} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \Big(\sum_{n=1}^{k_i} \big(\frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}} \otimes \mathrm{d}q^{j_n^i} + \frac{\partial}{\partial p_{j_n^i}} \otimes \mathrm{d}p_{j_n^i} \big) \Big).$$

Z Lematu 5.3.1 wynika, że przestrzeń styczna do foliacji symplektycznej zdegenerowanej struktury Poissona Π^{λ_i} jest rozpięta na polach wektorowych $\frac{\partial}{\partial q^l}$, $\frac{\partial}{\partial p_m}$, dla $l,m \notin \big\{j_1^i,\dots,j_{k_i}^i\big\}$. Funkcjami Casimira są $q^{j_n^i}$, $p_{j_n^i}$, $n = 1, \ldots, k_i$. Z drugiej strony dystrybucje $\sum\limits_{j \neq i} D_j$ są rozpięte przez pola wektorowe $\frac{\partial}{\partial q^l}$, $l \notin \left\{ j_1^i, \ldots, j_{k_i}^i \right\}$. Dowodzi to pierwszego punktu lematu.

Aby pokazać punkt drugi zauważmy, że dla danego pola wektorowego $V = V^l(q)\frac{\partial}{\partial q^l}$, równość $\mathscr{L}_V N = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $[V, NX] = N[V, X]$ dla dowolnego pola wektorowego X. Przyjmując $X = \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}$ otrzymujemy równość $\lambda_i \left[V, \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\right] = N\left[V, \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\right]$, co oznacza, że $\left[V, \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\right]$ jest wektorem własnym tensora N dla wartości własnej λ_i. Stąd $\left[V, \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\right]$ wyraża się przez kombinacje liniową $\frac{\partial}{\partial q^{j_1^i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q^{j_{k_i}^i}}$, zatem współczynniki $V^{j_1^i}, \ldots, V^{j_{k_i}^i}$ zależą wyłącznie od współrzędnych $q^i := \left(q^{j_1^i}, \ldots, q^{j_{k_i}^i}\right)$, dla dowolnego ustalonego wskaźnika $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Do dowodu punktu trzeciego zauważmy, że $\theta_i = \sum\limits_{n=1}^{k_i} p_{j_n^i} \mathrm{d}q^{j_n^i}$, w zadanym wyżej lokalnym układzie współrzędnych, a więc ewaluacja f_V^i formy θ_i na podniesieniu kostycznym:

$$\widetilde{V} = V^l(q)\frac{\partial}{\partial q^l} - p_l \frac{\partial V^l(q)}{\partial q^n}\frac{\partial}{\partial p_n} \tag{5.1}$$

pola wektorowego $V \in L(N)$, wynosi:

$$f_V^i = \sum_{n=1}^{k_i} V^{j_n^i}\left(q^i\right) p_{j_n^i}.$$

Ponieważ, dowolny liść F_0 foliacji stycznej do $\check{D}_i$ jest zadany w tym układzie współrzędnych równaniami $q^{j_n^i} = c^{j_n^i}$, $n = 1, \ldots, k_i$, natomiast dowolny liść symplektyczny $F \subset \pi^{-1}(F_0)$ foliacji $\mathscr{F}_i$ jest zdefiniowany równaniami $q^{j_n^i} = c^{j_n^i}$, $p_{j_n^i} = C_{j_n^i}$, $n = 1, \ldots, k_i$, gdzie po prawych stronach równości są pewne stałe, prawdziwa jest teza sformułowana w punkcie trzecim.

Załóżmy, że pole wektorowe $V \in L(N)$ jest styczne do pewnego liścia $\pi(F)$ foliacji $\check{D}_i$, wtedy:

$$V^{j_n^i}\left(c^i\right) = 0, \qquad \text{dla } n = 1, \ldots, k_i,$$

gdzie $c^i := \left(c^{j_1^i}, \ldots, c^{j_{k_i}^i}\right)$, w szczególności wartość funkcjonału Φ^i na stycznym polu wektorowym wynosi $\Phi_F^i = f_V^i|_F = 0$.

Ostatni punkt lematu wynika ze wzoru (5.1), na podniesienie kostyczne pola wektorowego $V \in L(N)$. □

W następnym lemacie wyznaczymy odwzorowania momentu działania algebry Liego $\mathfrak{g}$ na rozmaitości Q, względem zarówno generycznych (punkt 2) jak i zdegenerowanych (3) struktur Poissona z pęku $\{\Pi_1 - \lambda\Pi\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$, generowanego przez odwracalny tensor Nijenhuisa. Z konstrukcji relacji między liśćmi symplektycznymi F oraz liniowymi funkcjonałami φ_F^i w punkcie 7, wynika równość algebr Liego stabilizatorów obu obiektów.

Zauważmy, że lewe działanie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(TQ)$ jest antyhomomorfizmem, natomiast przekształcenie $V \mapsto \widetilde{V}$ jest homomorfizmem, stąd podniesienie kostyczne $\tilde{\rho}$ jest również antyhomomorfizmem, czyli jest lewym działaniem.

Lemat 5.3.5 ([LP19]). *Podtrzymując założenia poprzedniego lematu, dodatkowo przyjmijmy, że dane jest tranzytywne lewe działanie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(TQ)$, $\xi \mapsto V_\xi$, które zachowuje tensor Nijenhuisa N, to znaczy $\rho(\mathfrak{g}) \subset L(N)$. Oznaczmy przez $\tilde{\rho}$ rozszerzenie kostyczne działania, $\tilde{\rho}(\xi) := \widetilde{\rho(\xi)}$, $\xi \in \mathfrak{g}$. Dla ustalonego liścia F foliacji symplektycznej $\mathscr{F}_i$, $i \in \{1,\dots,s\}$, niech $\varphi_F^i\colon = \Phi_F^i \circ \rho \in \mathfrak{g}^*$ oznacza funkcjonał liniowy na $\mathfrak{g}$, indukowany przez funkcjonał $\Phi_F^i \in (L(N))^*$, określony w Lemacie* 5.3.4(3)*, oraz niech $\mathfrak{g}_F$ oznacza algebrę Liego stabilizatora liścia F, to znaczy zbiór elementów $\xi \in \mathfrak{g}$, dla których pole wektorowe $\tilde{\rho}(\xi)$ jest styczne do F. Niech $p_i\colon \Gamma(TQ) \to \Gamma(D_i)$ oznacza rzutowanie zadane przez rozkład $TQ = D_1 \oplus \dots \oplus D_s$, oraz θ będzie kanoniczą* 1*-formą Liouville'a na T^*Q. Wtedy:*

1. *dla dowolnego $i \in \{1,\dots,s\}$ odwzorowanie $L(N) \to L_i$ indukowane przez rzutowanie p_i, jest homomorfizmem algebr Liego, w szczególności $\rho_i\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(TQ)$, gdzie $\rho_i := p_i \circ \rho$, jest lewym działaniem algebry Liego $\mathfrak{g}$,*
2. *działanie $\tilde{\rho}$ jest hamiltonowskie względem dowolnej generycznej struktury Poissona Π^λ, $\lambda \neq \lambda_i$, $i \in \{1,\dots,s\}$, odwzorowanie momentu $\mu_\lambda\colon T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ wyraża się wzorem:*

$$\langle \mu_\lambda(x), \xi\rangle = (\psi(\lambda)^*\theta)(\tilde{\rho}(\xi))(x), \qquad \xi \in \mathfrak{g}, \tag{5.2}$$

gdzie $\psi(\lambda) = \left((N-\lambda I)^t\right)^{-1}$ jest dyfeomorfizmem T^*Q (przez $(\cdot)^t$ oznaczamy odwzorowanie transponowane); równoważnie, zgodnie z definicją f_V^i w Lemacie 5.3.4(3)*:*

$$\langle \mu_\lambda(x), \xi\rangle = \sum_{i=1}^{s} \frac{f^i_{\rho(\xi)}(x)}{\lambda_i - \lambda};$$

ponadto:

$$\mu_\lambda = \mu_{\mathrm{can}} \circ \psi(\lambda), \tag{5.3}$$

gdzie μ_{can} jest odwzorowaniem momentu względem kanonicznej struktury Poissona Π,

3. *dla danego liścia F foliacji symplektycznej $\mathscr{F}_i$, ograniczenie działania $\tilde{\rho}$ do działania algebry Liego stabilizatora $\mathfrak{g}_F$ na liściu F jest działaniem hamiltonowskim względem ograniczenia struktury Poissona Π^{λ_i} do F, odwzorowanie momentu $\mu^F_{\lambda_i}\colon F \to \mathfrak{g}^*$ dane jest wzorem:*

$$\left\langle \mu^F_{\lambda_i}(x), \xi\right\rangle = (\psi(\lambda_i)^*\theta)(\tilde{\rho}(\xi))(x), \qquad \xi \in \mathfrak{g}_F,$$

gdzie $\psi(\lambda_i)$ *jest gładkim odwzorowaniem* $T^*Q \to T^*Q$ *zdefiniowanym przez* $\psi(\lambda_j)|_{D_i^*} = \big((N-\lambda_i I)^t\big)^{-1}|_{D_i^*}$*,* $j \neq i$*,* $\psi(\lambda_i)|_{D_i^*} = 0$*, tu* $T^*Q = D_1^* \oplus \cdots \oplus D_s^*$ *jest rozkładem odpowiadającym rozkładowi* $TQ = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s$*,*[4]

4. *rozszerzenie kostyczne* $\tilde{\rho}_i$*,* $\tilde{\rho}_i(\xi) := \widetilde{\rho_i(\xi)}$*, działania* ρ_i *zdefiniowanego w punkcie 1 jest działaniem hamiltonowskim względem kanonicznej struktury Poissona* Π*, z odwzorowaniem momentu* $\nu_i\colon T^*Q \to \mathfrak{g}^*$*, danym wzorem* $\langle \nu_i(x), \xi\rangle = f^i_{\rho(\xi)}(x)$*,*
5. *dla dowolnego liścia* $F_0 \subset Q$ *foliacji stycznej do dystrybucji* $\check{D}_i$ *algebra Liego stabilizatora* $\mathfrak{g}_{F_0}$ *względem działania* ρ*, to znaczy zbiór elementów* $\xi \in \mathfrak{g}$*, dla których pole* $\rho(\xi)$ *jest styczne do* F_0*, pokrywa się z algebrą Liego stabilizatora podrozmaitości* $\pi^{-1}(F_0)$ *względem działania* $\tilde{\rho}$*, to znaczy zbiorem elementów* $\xi \in \mathfrak{g}$ *dla których* $\tilde{\rho}(\xi)$ *jest styczne do* $\pi^{-1}(F_0)$*,*
6. *zachodzi następujące zawieranie:* $\nu_i\big(\pi^{-1}(F_0)\big) \subset \mathfrak{g}_{F_0}^{\perp} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{F_0})^*$*,*
7. *relacja* $F \mapsto \varphi^i_F = \nu_i|_F$ *jest* $\mathfrak{g}_{F_0}$*-ekwiwariantną wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością pomiędzy liśćmi symplektycznymi* F *zdegenerowanej struktury* Π^{λ_i} *takimi, że* $\pi(F) = F_0$ *oraz liniowymi funkcjonałami określonymi na* k_i*-wymiarowej podprzestrzeni liniowej w* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{F_0})^*$ *(która pokrywa się z* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{F_0})^*$*, patrz Lemat* 5.3.6(4)),
8. *algebra Liego stabilizatora* $\mathfrak{g}_F \subset \mathfrak{g}$ *liścia* $F \subset \pi^{-1}(F_0)$ *względem działania* $\tilde{\rho}$ *pokrywa się z algebrą Liego stabilizatora funkcjonału* $\varphi^i_F \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{F_0})^*$ *względem działania* $\mathfrak{g}_{F_0}$*.*

Dowód: Pierwszy punkt wynika z Lematu 5.3.4(2), gdyż każdy zbiór L_i jest ideałem w $L(N)$. Do dowodu dwóch kolejnych punktów użyjemy współrzędnych użytych w dowodzie poprzedniego lematu. Lokalnie, struktury Poissona przybierają następującą postać:

$$\Pi = \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} \frac{\partial}{\partial p_{j_n^i}} \wedge \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}, \qquad \Pi^{\lambda} = \sum_i (\lambda_i - \lambda\ )\Big(\sum_{n=1}^{k_i} \frac{\partial}{\partial p_{j_n^i}} \wedge \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\Big),$$
$$\Pi_1 = \sum_i \lambda_i\Big(\sum_{n=1}^{k_i} \frac{\partial}{\partial p_{j_n^i}} \wedge \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\Big), \qquad \Pi^{\lambda_j} = \sum_{i\neq j} (\lambda_i - \lambda_j)\Big(\sum_{n=1}^{k_i} \frac{\partial}{\partial p_{j_n^i}} \wedge \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}\Big).$$

Dla pola wektorowego $V = V_\xi = \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j_n^i}(q^i) \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}}$ podniesienie kostyczne $\widetilde{V} = \widetilde{V}_\xi$ wyraża się wzorem:

$$\widetilde{V} = \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j_n^i}(q^i) \frac{\partial}{\partial q^{j_n^i}} - \sum_i \sum_{n,m=1}^{k_i} p_{j_n^i} \frac{\partial V_\xi^{j_n^i}(q^i)}{\partial q^{j_m^i}} \frac{\partial}{\partial p_{j_m^i}}.$$

[4]Równoważnie: $\langle \mu^F_{\lambda_i}(x), \xi\rangle = \sum_{j=1}^{s} \frac{f^j_{\rho(\xi)}(x)}{\lambda_j - \lambda_i}$ (zauważmy, że i-ty składnik sumy jest poprawnie zdefiniowany ponieważ $f^i_{\tilde{\rho}(\xi)}$ zanika dla $\xi \in \mathfrak{g}_F$, patrz Lemat 5.3.4(4).

Zauważmy, że przyjmując $H_\xi = \theta(\widetilde{V}) = \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j_n^i}(q^i) p_{j_n^i}$ spełniona jest równość $\widetilde{V} = \Pi(H_\xi)$, zatem jest to hamiltonowskie pole wektorowe względem kanonicznej struktury Poissona Π (por. Uwaga 5.3.1). Równocześnie $\widetilde{V} = \Pi^\lambda(H_\xi^\lambda)$, dla hamiltonianu danego wzorem:

$$H_\xi^\lambda = \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} \frac{V_\xi^{j_n^i}(q^i) p_{j_n^i}}{(\lambda_i - \lambda)}.$$

Ponadto, funkcje H_ξ^λ są globalnie i poprawnie określone (niezależne od wyboru lokalnego układu współrzędnych), gdyż $H_\xi^\lambda = (\psi(\lambda)^*\theta)(\widetilde{V}_\xi)$. Alternatywnie możemy przedstawić H_ξ^λ wykorzystując funkcje $f^i_{V_\xi}$ zdefiniowaną w Lemacie 5.3.4(3):

$$H_\xi^\lambda = \sum_i \frac{f^i_{V_\xi}}{\lambda_i - \lambda}.$$

Uwzględniając własność $V_{[\xi,\zeta]} = [V_\xi, V_\zeta]$ otrzymujemy:

$$\Pi^\lambda(H_\xi^\lambda) H_\zeta^\lambda - H_{[\xi,\zeta]}^\lambda = \sum_i \sum_{n,m=1}^{k_i} V_\xi^{j_n^i}(q^i) \frac{\partial V_\zeta^{j_m^i}(q^i)}{\partial q^{j_n^i}} \frac{p_{j_m^i}}{\lambda_i - \lambda}$$
$$- \sum_i \sum_{n,m=1}^{k_i} p_{j_n^i} \frac{\partial V_\xi^{j_n^i}(q^i)}{\partial q^{j_m^i}} V_\zeta^{j_m^i}(q^i) \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} V_{[\xi,\zeta]}^{j_n^i}(q^i) \frac{p_{j_n^i}}{\lambda_i - \lambda} = 0,$$

co dowodzi, że $\Pi^\lambda(H_\xi^\lambda) H_\zeta^\lambda = H_{[\xi,\zeta]}^\lambda$, a zatem działanie $\tilde{\rho}$ jest hamiltonowskie względem struktury Poissona Π^λ, dla $\lambda \neq \lambda_i$.

Wzór (5.3) wynika z równości (5.2), ponieważ $\langle \mu_{\mathrm{can}}(x), \xi \rangle = \theta(\tilde{\rho}(\xi))(x)$.

Załóżmy, że pole wektorowe $V = V_\xi$ jest styczne do liścia symplektycznego F określonego w lokalnym układzie współrzędnych równaniami $q^{j_n^i} = \mathrm{const}$, $p_{j_n^i} = \mathrm{const}$, dla $n = 1, \ldots, k_i$. Wówczas z równania (5.1) otrzymujemy:

$$\widetilde{V}|_F = \sum_{l \neq i} \sum_{n=1}^{k_l} V_\xi^{j_n^l}(q^l) \frac{\partial}{\partial q^{j_n^l}} - \sum_{l \neq i} \sum_{n,m=1}^{k_l} p_{j_n^l} \frac{\partial V_\xi^{j_n^l}(q^l)}{\partial q^{j_m^l}} \frac{\partial}{\partial p_{j_m^l}} = \Pi^{\lambda_i}(H_\xi)\big|_F,$$

gdzie teraz:

$$H_\xi = \sum_{l \neq i} \sum_{n=1}^{k_l} \frac{V_\xi^{j_n^l}(q^l) p_{j_n^l}}{\lambda_l - \lambda_i}.$$

Poprawność określenia funkcji H_ξ oraz ich globalność dla dowolnego $\xi \in \mathfrak{g}$, wynika z przedstawienia

$$H_\xi = \sum_{l\neq i} \frac{f^l_{V_\xi}}{\lambda_l - \lambda_i}$$

oraz równości:

$$\begin{aligned}\Pi^{\lambda_i}(H_\xi)H_\zeta - H_{[\xi,\zeta]} &= \sum_{l\neq i}\sum_{n,m=1}^{k_l} V_\xi^{j^l_n}(q^l)\frac{\partial V_\zeta^{j^l_m}(q^l)}{\partial q^{j^l_n}}\frac{p_{j^l_m}}{\lambda_l-\lambda_i}\\ &-\sum_{l\neq i}\sum_{n,m=1}^{k_l} p_{j^l_n}\frac{\partial V_\xi^{j^l_n}(q^l)}{\partial q^{j^l_m}}V_\zeta^{j^l_m}(q^l)\frac{1}{\lambda_l-\lambda_i} - \sum_{l\neq i}\sum_{n=1}^{k_l} V_{[\xi,\zeta]}^{j^l_n}(q^l)\frac{p_{j^l_n}}{\lambda_l-\lambda_i} = 0.\end{aligned}$$

Ponieważ liść F foliacji symplektycznej $\mathscr{F}_i$ jest podrozmaitością Poissona względem struktury Π^{λ_i}, zatem:

$$\{H_\xi|_F, H_\zeta|_F\}_{\Pi^{\lambda_j}|_F} = \{H_\xi, H_\zeta\}_{\Pi^{\lambda_j}}|_F = H_{[\xi,\zeta]}|_F.$$

Aby udowodnić punkt 4 zauważmy, że jeśli $V_\xi = \sum_i \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j^i_n}(q^i)\frac{\partial}{\partial q^{j^i_n}}$, $\xi \in \mathfrak{g}$, jest fundamentalnym polem wektorowym działania ρ, to $\rho_i(\xi) = \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j^i_n}(q^i)\frac{\partial}{\partial q^{j^i_n}}$ jest fundamentalnym polem wektorowym działania ρ_i. Stąd podniesienie kostyczne $\tilde{\rho}_i(\xi)$ jest hamiltonowskim polem wektorowym względem Π z funkcją Hamiltona $H^i_\xi := f^i_{\rho_i(\xi)} = f^i_{V_\xi} = \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j^i_n}(q^i)p_{j^i_n}$. Wystarczy zatem skorzystać z własności $\rho_i([\xi,\zeta]) = [\rho_i(\xi),\rho_i(\zeta)]$, aby uzyskać wymaganą równość:

$$\begin{aligned}\Pi(H^i_\xi)H^i_\zeta - H^i_{[\xi,\zeta]} &= \sum_{n,m=1}^{k_i} V_\xi^{j^i_n}(q^i)\frac{\partial V_\zeta^{j^i_m}(q^i)}{\partial q^{j^i_n}}p_{j^i_m} - \sum_{n,m=1}^{k_i} p_{j^i_n}\frac{\partial V_\xi^{j^i_n}(q^i)}{\partial q^{j^i_m}}V_\zeta^{j^i_m}(q^i)\\ &-\sum_{n=1}^{k_i} V_{[\xi,\zeta]}^{j^i_n}(q^i)p_{j^i_n} = 0.\end{aligned}$$

Punkt 5 jest konsekwencją punktu 5 Lematu 5.3.4. Natomiast punkt 6 wynika z punktu 4 i punktu 1 Lematu 5.3.4, przy uwzględnieniu, że podrozmaitość $\pi^{-1}(F_0)$ składa się z symplektycznych liści zdegenerowanej struktury Poissona Π^{λ_i} oraz korzystając z równości $\Phi^i_F(\rho_i(\xi)) := f^i_{\rho_i(\xi)}|_F$, zachodzącej dla dowolnego liścia F foliacji $\mathscr{F}_i$.

Aby udowodnić punkt 7 zauważmy, że $\mathfrak{g}_{F_0}$-ekwiwariantność wynika z $\mathfrak{g}$-ekwiwariantności odwzorowania momentu ν_i. Przypomnijmy (z dowodu Lematu 5.3.4):

$$\varphi^i_F(\xi) = \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j^i_n}(c^i) C_{j^i_n}, \qquad \xi \in \mathfrak{g},$$

gdzie c^i, $C_{j^i_n}$ są wartościami stałymi jednoznacznie określającymi wybór liścia symplektycznego F, a $V_\xi^{j^i_n}$ są współczynnikami fundamentalnego pola wektorowego $\rho(\xi) = V^l_\xi(q)\frac{\partial}{\partial q^l}$.

Ustalmy liść F_0 foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i$, to znaczy ustalmy wartości stałych $\left(c^i\right)$. Dla dowolnego $\xi \in \mathfrak{g}$ otrzymujemy liniowe odwzorowanie: [5]

$$\left(C_{j^i_1}, \ldots, C_{j^i_{k_i}}\right) \mapsto \sum_{n=1}^{k_i} V_\xi^{j^i_n}(c^i) C_{j^i_n},$$

wyrażające przyporządkowanie $F \mapsto \varphi^i_F(\xi)$, tu $k_i = \operatorname{corank} \check{D}_i$. Jednoznaczność tego przyporządkowania jest równoważna stwierdzeniu, że poniższa macierz jest niezdegenerowana:

$$\begin{bmatrix} V_{\xi_1}^{j^i_1}(c^i) & \cdots & V_{\xi_1}^{j^i_{k_i}}(c^i) \\ \vdots & & \vdots \\ V_{\xi_{k_i}}^{j^i_1}(c^i) & \cdots & V_{\xi_{k_i}}^{j^i_{k_i}}(c^i) \end{bmatrix},$$

dla liniowo niezależnych $\xi_1, \ldots, \xi_{k_i} \in \mathfrak{g}$ spoza $\mathfrak{g}_{F_0}$. Natomiast, niezdegenerowanie tej macierzy wynika z faktu, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ działa tranzytywnie na Q, a w konsekwencji również na zbiorze składającym się z liści foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i$.

Ostatni punkt wynika wprost z poprzedniego. □

Zastosujmy powyższe rezultaty do przestrzeni jednorodnych $Q = G/K$. Niech $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$ będzie G-niezmienniczym półprostym tensorem Nijenhuisa na G/K, o wartościach własnych $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$[6]. Z Twierdzenia 5.1.1 istnieje rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s$ na sumę podprzestrzeni, o następujących własnościach:

1) $\forall_{i,j \in \{1,\ldots,s\}, i \neq j}\ \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \mathfrak{k}$,
2) $\forall_{i,j \in \{1,\ldots,s\}}\ \mathfrak{g}_i + \mathfrak{g}_j$ są podalgebrami Liego w $\mathfrak{g}$,
3) powyższy rozkład zadaje rozkład $T(G/K) = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s$ na inwolutywne podwiązki, oraz $N|_{D_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{D_i}$.

Przez $P\colon G \to G/K$ oraz $\pi\colon T^*(G/K) \to G/K$ będziemy rozumieć kanoniczne rzutowania. Przez $p_i\colon T(G/K) \to D_i$ oznaczmy rzutowanie związane z rozkładem $T(G/K) = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s$.

[5] Chociaż zakres wartości współczynników c^i jest ograniczony przez lokalny układ współrzędnych q^i, to stałe $C_{j^i_n}$ mogą przyjmować dowolne wartości.

[6] Zob. przypis 3 na stronie 55.

Z konstrukcji wykorzystanej w dowodzie Lematu 5.1.3 wynika, że dystrybucje własne D_i tensora N pokrywają się z $P_*\widehat{D}_i$, gdzie $\widehat{D}_i$ są lewoniezmienniczymi dystrybucjami na grupie Liego G, generowanymi przez podprzestrzenie $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g} \cong T_eG$. W szczególności, ponieważ $\ker P_*$ jest lewoniezmienniczą dystrybucją generowaną przez podalgebrę Liego $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g} \cong T_eG$, zatem rząd dystrybucji D_i, (równy krotności k_i wartości własnej λ_i), wynosi $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{k})$.

Oznaczmy $\breve{\mathfrak{g}}_i := \sum\limits_{j\neq i} \mathfrak{g}_j$ (z punktu 2 powyżej jest to podalgebra Liego w $\mathfrak{g}$), oraz niech $\check{G}_i$ będzie odpowiadającą $\breve{\mathfrak{g}}_i$ podgrupą w G. Z Lematu 5.1.3 wynika, że liście foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i := \sum\limits_{j\neq i} D_j$ są rzutami lewych warstw $g\check{G}_i$, $g \in G$, ze względu na rzutowanie P.

Lemat 5.3.6 ([LP19]). *Niech $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$ będzie odwracalnym G-niezmienniczym półprostym tensorem Nijenhuisa na przestrzeni jednorodnej G/K, o wartościach własnych $\{\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$*[7]*, natomiast $\widetilde{N}\colon T(T^*(G/K)) \to T(T^*(G/K))$ jego podniesieniem kostycznym. Przez Π oznaczmy kanoniczną strukturę Poissona na $T^*(G/K)$ oraz niech $\Pi_1 = \widetilde{N}\circ\Pi$ będzie dodatkową strukturą Poissona (patrz Lemat* 5.3.3)*. Wtedy:*

1. *dla dowolnego liścia symplektycznego F struktury Poissona $\Pi^{\lambda_i} := \Pi_1 - \lambda_i\Pi$ istnieje element $g \in G$ taki, że $\pi(F) = P\big(g\check{G}_i\big)$, taki element g jest wyznaczony z dokładnością do prawego mnożenia przez $h \in \check{G}_i$,*
2. *algebra Liego stabilizatora $\mathfrak{g}_{\pi(F)} \subset \mathfrak{g}$ liścia $\pi(F) = P\big(g\check{G}_i\big)$ z foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i$, względem działania grupy G na G/K pokrywa się z $\mathrm{Ad}_g\,\breve{\mathfrak{g}}_i$,*
3. *algebra Liego stabilizatora $\mathfrak{g}_F \subset \mathfrak{g}$ liścia F względem rozszerzonego działania grupy Liego G na $T^*(G/K)$ pokrywa się z $\mathfrak{g}^{\varphi^i_F} \subset \mathrm{Ad}_g\,\breve{\mathfrak{g}}_i$, algebrą Liego stabilizatora funkcjonału $\varphi^i_F \in (\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}_g\,\breve{\mathfrak{g}}_i)^*$ zbudowanego w Lemacie* 5.3.5 *przy użyciu $\rho\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(T(G/K))$, naturalnego działania algebry Liego $\mathfrak{g}$ na G/K,*
4. *jeśli ustalimy $F_0 \subset G/K$ liść foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i$, $F_0 = P\big(g\check{G}_i\big)$ (dla pewnego $g \in G$), wówczas przyporządkowanie $F \mapsto \varphi^i_F$ jest $\mathrm{Ad}_g\,\breve{\mathfrak{g}}_i$-niezmienniczą wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością pomiędzy liśćmi symplektycznymi F struktury Π^{λ_i} takimi, że $\pi(F) = F_0$ oraz liniowymi funkcjonałami $(\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}_g\,\breve{\mathfrak{g}}_i)^*$.*

Dowód: Punkty 1 i 2 wynikają z zastosowania Lematu 5.1.3 do podalgebry $\mathfrak{h} = \breve{\mathfrak{g}}_i$. Punkt 3 jest konsekwencją punktu 2 i Lematu 5.3.5(8). Punkt 4 wynika z Lematu 5.3.5(7), ponieważ krotność wartości własnej λ_i jest równa $k_i = \dim\mathfrak{g}_i - \dim\mathfrak{k} = \dim(\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}_g\,\breve{\mathfrak{g}}_i)^*$. □

5.4 Algebraiczne warunki kroneckerowskości redukcji pęku Poissona

Głównym wynikiem zawartym w niniejszej pracy jest poniższe twierdzenie wskazujące algebraiczne warunki równoważne kroneckerowskości pęku struktur Poissona, generowanego przez G-niezmienniczy półprosty odwracalny tensor Nijenhuisa na przestrzeni funkcji

[7]Zob. przypis 3 na stronie 55.

G-niezmienniczych. Zauważmy, że odwracalność tensora może być zawsze uzyskana poprzez dodanie operatora identycznościowego, ponieważ nie zmienia to otrzymanej struktury bihamiltonowskiej.

Niech G będzie zwartą grupą Liego, K jej domkniętą podgrupą Liego. Załóżmy, że naturalne działanie G na $M = T^*(G/K)$ jest generycznie *lokalnie swobodne*, to znaczy stabilizator odpowiadający orbitom typu głównego jest zbiorem dyskretnym. Ustalmy taki stabilizator H. W takim przypadku podzbiór:

$$M_H = \left\{x \in M \colon G_x = gHg^{-1} \text{ dla pewnego } g \in G\right\}$$

rozmaitości M, składa się z sumy wszystkich orbit $G \cdot x$ w M izomorficznych z G/H, jest to otwarty i gęsty podzbiór w M, ponadto przestrzeń orbit $M'_H := M_H/G$ jest gładką rozmaitością. Przez $p\colon M_H \to M_H/G$ oznaczamy kanoniczne rzutowanie.

Twierdzenie 5.4.1 ([LP19]). *Niech $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$ będzie G-niezmienniczym odwracalnym półprostym tensorem Nijenhuisa na G/K o wartościach własnych $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$*[8]*, to znaczy,* (*z Twierdzenia* 5.1.1) *istnieje rozkład*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s \tag{5.4}$$

na sumę podprzestrzeni takich, że:

- $\forall_{i,j \in \{1,\dots,s\}, i \neq j}\ \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \mathfrak{k}$,
- $\forall_{i,j \in \{1,\dots,s\}}\ \mathfrak{g}_i + \mathfrak{g}_j$ *są podalgebrami Liego w* $\mathfrak{g}$,
- *rozkład powyżej indukuje rozkład $T(G/K) = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s$ na inwolutywne podwiązki oraz $N|_{D_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{D_i}$.*

Niech (Π, Π_1) będzie parą Poissona składającą się z kanonicznej struktury Π na $T^*(G/K)$ oraz struktury Poissona $\Pi_1 = \widetilde{N} \circ \Pi$, gdzie $\widetilde{N}$ jest kostycznym podniesieniem tensora N.

Wówczas struktura bihamiltonowska na M_H/G generowana przez zredukowaną parę Poissona $(p_*\Pi, p_*\Pi_1)$ jest typu Kroneckera w dowolnym punkcie zbioru $p(W)$, gdzie $W \subset M_H$ jest otwartym i gęstym zbiorem (określonym dokładnie w dowodzie) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $i \in \{1, \dots, s\}$ można znaleźć element $a_i \in (\mathfrak{g}/\breve{\mathfrak{g}}_i)^*$ taki, że:

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g}^{a_i} + \operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\breve{\mathfrak{g}}_i)^*} \mathscr{O}_{a_i} = \operatorname{ind} \mathfrak{g}, \tag{5.5}$$

gdzie $\breve{\mathfrak{g}}_i = \sum_{j \neq i} \mathfrak{g}_j$ oraz $\mathfrak{g}^{a_i}$ i $\mathscr{O}_{a_i}$ są odpowiednio algebrą Liego stabilizatora i orbitą elementu a_i względem działania kodołączonego $\operatorname{ad}^*\colon \breve{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}((\mathfrak{g}/\breve{\mathfrak{g}}_i)^*)$.

[8] Dopuszczamy tak rzeczywiste jak i zespolone wartości własne, por. przypis 3 na stronie 55 oraz poczatek dowodu Twierdzenia 5.4.1.

Warunki (5.5) *są równoważne równościom:*

$$\operatorname{ind}(\breve{\mathfrak{g}}_i \ltimes (\mathfrak{g}/\breve{\mathfrak{g}}_i)) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}, \tag{5.6}$$

gdzie czynnik po lewej stronie równości jest sumą półprostą algebry Liego $\breve{\mathfrak{g}}_i$ i przestrzeni wektorowej $(\mathfrak{g}/\breve{\mathfrak{g}}_i)$, względem działania dołączonego $\mathrm{ad}\colon \breve{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}((\mathfrak{g}/\breve{\mathfrak{g}}_i))$.

Dowód: Na mocy Lematu 5.4.1, podanego poniżej, warunki (5.5) oraz (5.6) są równoważne.

Oznaczmy zbiór $U = M_H \setminus \big(\bigcup_\lambda \mu_\lambda^{-1}(\operatorname{Sing}\mathfrak{g}^*)\big)$, uzyskany przy pomocy odwzorowania momentu μ_λ określonego w Lemacie 5.3.5(2).

Zauważmy, że wszystkie wykorzystywane obiekty poddają się naturalnemu procesowi kompleksyfikacji (zob. dodatek B): zwarte grupy Liego G oraz K są włożone w ich kompleksyfikację Chevalley'a G^c oraz K^c, tak samo przestrzeń jednorodna $Q = G/K$ jest włożona w zespoloną przestrzeń $Q^c = G^c/K^c$. Ponadto, rozkład (5.4) implikuje rozkład $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} + \cdots + \mathfrak{g}_s^{\mathbb{C}}$, który w konsekwencji zadaje rozkład $TQ^c = D_1^c \oplus \cdots \oplus D_s^c$ holomorficznej wiązki stycznej do Q^c, na inwolutywne zespolone analityczne dystrybucje, z którego otrzymujemy zespolony analityczny $(1,1)$-tensor N^c przez określenie $N^c|_{D_i^c} = \lambda_i \operatorname{Id}_{D_i^c}$. Z Lematu 5.3.5(2) wynika spełnienie założeń Twierdzenia 4.3.1 (wiadomo, że dla reduktywnych algebr Liego $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\mathfrak{g}^* \geq 3$). Zatem redukcja struktury bihamiltonowskiej $\big\{\big(\Pi^\lambda\big)' = p_*\Pi_1 - \lambda p_*\Pi\big\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ jest typu Kroneckera w punkcie $x' \in p(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{corank} p_*\Pi^{\lambda_i}|_{x'} = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, $i = 1,\ldots,s$, gdzie $\Pi^{\lambda_i} = \Pi_1 - \lambda_i\Pi$ (zob. Twierdzenie 4.3.1(2)). Następnym krokiem będzie wyrażenie $\operatorname{corank} p_*\Pi^{\lambda_i}|_{x'}$ w terminach równoważnych, zob. wzór (5.7).

Z Lematu 5.3.5(3) wynika, że ograniczenie działania kostycznego $\tilde{\rho}\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(T(T^*G/K))$ do algebry Liego stabilizatora $\mathfrak{g}_F$ dowolnego liścia symplektycznego F struktury Poissona Π^{λ_i} jest działaniem hamiltonowskim względem tej struktury, z odwzorowaniem momentu $\mu_{\lambda_i}^F\colon F \to \mathfrak{g}^*$. Ograniczenie działania do algebry Liego $\mathfrak{g}_F$ jest działaniem lokalnie swobodnym, więc na podstawie Lematu C.6.3 o bifurkacji (zob. dowód Twierdzenia 4.3.1), korząd $\big(\Pi^{\lambda_i}|_F\big)'$ redukcji struktury Poissona ograniczonej do liścia symplektycznego $\Pi^{\lambda_i}|_F$, w punkcie $x' = p(x)$, dla $x \in F$, jest równy indeksowi algebry Liego $\mathfrak{g}_F$, przy założeniu $\mu_{\lambda_i}^F(x) \notin \operatorname{Sing}\mathfrak{g}_F$. Zbiór $\operatorname{Sing}\mathfrak{g}_F$ jest algebraiczny i nigdzie gęsty w $\mathfrak{g}_F^*$, stąd zbiór $U_F = (F\cap U)\setminus\big(\bigcup_{i=1}^s \big(\mu_{\lambda_i}^F\big)^{-1}\big)(\operatorname{Sing}\mathfrak{g}_F)$ jest otwarty i gęsty w F, ponadto $V = \bigcup_F U_F$ jest otwarty i gęsty w M_H. Dalej będziemy rozważać wyłącznie punkty x' należące do zbioru $p(V)$.

Pokażemy prawdziwość równości:

$$\operatorname{corank}_{(M_H/G)}\big(\Pi^{\lambda_i}\big)'_{x'} = \operatorname{corank}_{F/G_F}\big(\Pi^{\lambda_i}|_F\big)'_{x'} + \operatorname{codim}_{\mathscr{S}_i} G\cdot F.$$

Przez G_F oznaczmy podgrupę Liego zawartą w G odpowiadającą podalgebrze Liego $\mathfrak{g}_F$. Niech $\mathscr{S}_i$ oznacza przestrzeń liści symplektycznych struktury Poissona Π^{λ_i}. Na $\mathscr{S}_i$ indukowane jest naturalne działanie grupy Liego G przez działanie G na $M = T^*(G/K)$ (dzięki

G-niezmienniczości dwuwektora Π^{λ_i}). Niech $G\cdot F$ będzie orbitą w $\mathscr{S}_i$ zawierającą liść symplektyczny $F\in\mathscr{S}_i$ względem tego indukowanego działania. Przypomnijmy (Lemat 5.3.4(1)), że przestrzeń $\mathscr{S}_i$ składa się z podrozmaitości postaci $\pi^{-1}(F_0)$, gdzie $F_0\subset G/K$ jest liściem foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i=\sum_{j\neq i} D_j$. Ponieważ działanie G jest tranzytywne na G/K, a w konsekwencji również na przestrzeni liści foliacji stycznej do dystrybucji $\check{D}_i$, otrzymujemy równość kowymiarów:

$$\operatorname{codim}_{\mathscr{S}_i} G\cdot F=\operatorname{codim}_{\mathscr{S}_i|_{\pi^{-1}(\pi(F))}} G_{\pi(F)}\cdot F,$$

gdzie $G_{\pi(F)}$ jest podgrupą odpowiadającą algebrze Liego stabilizatora $\mathfrak{g}_{\pi(F)}$, który na mocy Lematu 5.3.5(5) pokrywa się z algebrą Liego stabilizatora rozmaitości $\pi^{-1}(\pi(F))$ względem rozszerzenia kostycznego działania, natomiast $\mathscr{S}_i\,|_{\pi^{-1}(\pi(F))}$ oznacza podrozmaitość w $\mathscr{S}_i$ składającą się z liści zawartych w podrozmaitości Poissona $\pi^{-1}(\pi(F))$. Wykorzystując Lematy 5.3.5(7), 5.3.5(8) oraz 5.3.6(4) otrzymujemy odpowiedniości między podrozmaitością $\mathscr{S}_i\,|_{\pi^{-1}(\pi(F))}$ i przestrzenią $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\pi(F)})^*$, orbitami $G_{\pi(F)}\cdot F$ i $\mathscr{O}_{\varphi^i_F}$ oraz algebrami stabilizatorów $\mathfrak{g}_F$ i $\mathfrak{g}^{\varphi^i_F}$, gdzie $\varphi^i_F\in(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\pi(F)})^*$ jest funkcjonałem przyporządkowanym do F, dla którego $\mathfrak{g}^{\varphi^i_F}$ i $\mathscr{O}_{\varphi^i_F}$ oznaczają odpowiednio algebrę stabilizatora i orbitę względem działania algebry Liego $\mathfrak{g}_{\pi(F)}$ na $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\pi(F)})^*$.

Wykazaliśmy zatem, że:

$$\begin{aligned}\operatorname{corank}_{(M_H/G)}\left(\Pi^{\lambda_i}\right)'_{x'}&=\operatorname{corank}_{F/G_F}\left(\Pi^{\lambda_i}\,|_F\,\right)'_{x'}+\operatorname{codim}_{\mathscr{S}_i} G\cdot F\\&=\operatorname{ind}\mathfrak{g}_F+\operatorname{codim}_{\mathscr{S}_i|_{\pi^{-1}(\pi(F))}} G_{\pi(F)}\ \cdot\ F\\&=\operatorname{ind}\mathfrak{g}^{\varphi^i_F}+\operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\pi(F)})^*}\mathscr{O}_{\varphi^i_F}.\end{aligned}$$

Korzystając z Lematu 5.3.6(2), otrzymujemy dodatkowo równość $\mathfrak{g}_{\pi(F)}=\operatorname{Ad}_g\check{\mathfrak{g}}_i$ dla pewnego elementu $g\in G$, a zatem:

$$\operatorname{corank}\left(\Pi^{\lambda_i}\right)'_{x'}=\operatorname{ind}\mathfrak{g}^{\varphi^i_F}+\operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g\check{\mathfrak{g}}_i)^*}\mathscr{O}_{\varphi^i_F}. \tag{5.7}$$

Do ukończenia dowodu załóżmy, że pęk Poissona $\left\{\left(\Pi^{\lambda}\right)'\right\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ jest typu Kroneckera w punkcie x'. Wówczas z Twierdzenia 4.3.1 mamy równość $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{\varphi^i_F}+\operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g\check{\mathfrak{g}}_i)^*}\mathscr{O}_{\varphi^i_F}=\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, dla $i\in\{1,\ldots,s\}$. Działając operatorem $\operatorname{Ad}_{g^{-1}}$ otrzymujemy warunki (5.5).

Odwrotnie, zakładając prawdziwość warunków (5.6), ze wzoru (5.8) (Lemat 5.4.1 poniżej) otrzymujemy $\operatorname{ind}\mathfrak{g}=\operatorname{ind}\mathfrak{g}^{a_i}+\operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\check{\mathfrak{g}}_i)^*}\mathscr{O}_{a_i}$ dla $a_i\in R((\mathfrak{g}/\check{\mathfrak{g}}_i)^*)$. Zatem dla dowolnego $g\in G$ mamy $\operatorname{ind}\mathfrak{g}=\operatorname{ind}\mathfrak{g}^{g\cdot a_i}+\operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g\check{\mathfrak{g}}_i)^*}\mathscr{O}_{g\cdot a_i}$ dla $g\cdot a_i\in R((\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g\check{\mathfrak{g}}_i)^*)$, względem działania kodołączonego $g\cdot a_i:=\operatorname{Ad}^*_{g^{-1}}a_i$. Ustalmy $g\in G$, niech F_i będzie liściem symplektycznym struktury Poissona Π^{λ_i} odpowiadającym elementowi $g\cdot a_i$, jak w Lemacie 5.3.6(4) (przyjmując

$\pi(F_i) = P\big(\mathrm{Ad}_g \check{G}_i\big)$). Zauważmy, że dla parami różnych $i, j \in \{1, \ldots, s\}$, liście F_i, F_j są wzajemnie transwersalne, oraz $\sum_{i=1}^{s} \operatorname{codim} F_i = \dim M$, więc ich przecięcie $\bigcap_i F_i$ jest pewnym punktem, oznaczmy ten punkt przez x.

Przypomnijmy (Lemat 5.3.5(6), (7) oraz Lemat 5.3.6(4)), że odwzorowanie:

$$\nu_i^g := \nu_i|_{\pi^{-1}(\pi(F_i))} \colon\ \pi^{-1}(\pi(F_i)) \to \mathfrak{g}^{\perp}_{\pi(F_i)} \cong (\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g \breve{\mathfrak{g}}_i)^*$$

jest epimorfizmem, więc zbiór $\left(\nu_i^g\right)^{-1}(R((\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g \breve{\mathfrak{g}}_i)^*)$ jest otwarty i gęsty w $\pi^{-1}(\pi(F_i))$, stąd również zbiór $W = V \cap \big(\bigcup_{g\in G} \bigcap_{i=1}^{s} \left(\nu_i^g\right)^{-1}\big)(R((\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g \breve{\mathfrak{g}}_i)^*))$ jest otwarty i gęsty w M_H.

Dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, s\}$, ustalając element a_i taki, że $g \cdot a_i \in \nu_i^g\big(W \cap \pi^{-1}(\pi(F_i))\big)$, otrzymujemy przynależność $x \in W$. Dla punktu $x' = p(x)$ ze wzoru (5.7) wynika równość $\operatorname{ind} \mathfrak{g}^{g\cdot a_i} + \operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}_g \breve{\mathfrak{g}}_i)^*} \mathscr{O}_{g\cdot a_i} = \operatorname{corank} p_* \Pi^{\lambda_i}|_{x'}$. Ostatecznie, na mocy Twierdzenia 4.3.1 poddany redukcji pęk Poissona $\{(\Pi^{\lambda})'\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ jest typu Kroneckera w punkcie $x' \in p(W)$. $\square$

Lemat 5.4.1. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego oraz $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ podalgebrą Liego. Wówczas istnienie elementu $a \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$, dla którego zachodzi równość*

$$\operatorname{ind} \mathfrak{h}^a + \operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*} \mathscr{O}_a = \operatorname{ind} \mathfrak{g}, \tag{5.8}$$

gdzie $\mathfrak{h}^a$ i $\mathscr{O}_a$ są odpowiednio algebrą Liego stabilizatora i orbitą elementu a względem działania kodołączonego $\mathrm{ad}^* \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$, jest równoważne następującemu warunkowi:

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}, \tag{5.9}$$

tu algebra Liego $\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ jest sumą półprostą algebry $\mathfrak{h}$ i przestrzeni wektorowej $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ względem działania dołączonego ad*. Ponadto, jeśli jeden z warunków zachodzi, wówczas równość* (5.8) *jest spełniona dla dowolnego punktu $a \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ należącego do otwartego i gęstego podzbioru*

$$R((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*) := \{\alpha \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \mid \exists \beta \in (\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^* \setminus \operatorname{Sing}((\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^*) \colon \alpha = \beta|_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}\} \subset (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*.$$

Dowód: Z artykułu [Rai78, Propozycja 1.3(i)] wiemy, że dla $a \in R((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ mamy:

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})) = \operatorname{ind} \mathfrak{h}^a + \operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*} \mathscr{O}_a.$$

Zatem równość (5.9) pociąga za sobą (5.8). Z drugiej strony, dla dowolnego punktu a:

$$\operatorname{ind} \mathfrak{h}^a + \operatorname{codim}_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*} \mathscr{O}_a = \operatorname{corank} \Pi_{(\mathfrak{h}\ltimes(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^*}|_{\beta} \geq \operatorname{ind}(\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})),$$

gdzie $\beta \in \mathrm{Sing}(\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^*$ jest dowolnym elementem, dla którego $a = \beta|_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}$ (zob. [Pan07a, Twierdzenie 1.1]). Ponadto ponieważ $\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ jest kontrakcją algebry Liego $\mathfrak{g}$, więc:

$$\mathrm{ind}(\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})) \geq \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}.$$

Zatem, jeśli $\mathrm{ind}\,\mathfrak{h}^a + \mathrm{codim}_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*} \mathscr{O}_a = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$ dla pewnego a, wtedy $\mathrm{ind}(\mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})) = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$. □

Uwaga 5.4.1. Gdy $K = \{e\}$ jest trywialną podgrupą Liego w G, warunek (5.5) pokrywa się z warunkiem koniecznym i wystarczającym na kroneckerowskości pęku Liego–Poissona związanego z algebraicznym operatorem Nijenhuisa przedstawionym w [Pan06, Twierdzenie 2.5].

Uwaga 5.4.2. Powyższe twierdzenie zostało sformułowane w artykule [LP19] dla rzeczywistych wartości własnych. Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli wszystkie rozpatrywane obiekty są obiektami zespolono analitycznymi.

W dowodzie Twierdzenia 5.4.1 bardzo dokładnie uwzględniliśmy budowę zbioru W, dla którego powstająca po redukcji struktura bihamiltonowska jest typu Kroneckera w dowolnym punkcie zbioru $p(W)$ (oraz *nie jest typu Kroneckera* w dopełnieniu do tego zbioru). Jest to ważne z punktu widzenia analizy jakościowej potoków geodezyjnych, ponieważ poza tym zbiorem foliacja lagranżowska zawiera osobliwości (zob. [BI14]).

6 Całkowalność pewnych potoków geodezyjnych

Rozdział jest poświęcony zastosowaniom wyników poprzedniego rozdziału do wykazania całkowalności potoków geodezyjnych pewnych metryk na określonych przestrzeniach jednorodnych. W tym celu najpierw omówimy w podrozdziale 6.1 metryki normalne oraz te, powiazane z operatorem bezwładności generowanym przez operator Nijenhuisa, a potem sformułujemy i udowodnimy Twierdzenie 6.1.1 dające warunki wystarczające do zupełnej całkowalności takich metryk w klasie funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu. Następnie w dalszych podrozdziałach wykażemy spełnienie wspomnianych warunków dla czterech serii konkretnych przykładów spośród sklasyfikowanych w Tabeli 1 oraz, w przypadku metryki normalnej, na przestrzeniach flag zupełnych.

6.1 Warunki zupełnej całkowalności potoku geodezyjnego metryki normalnej i metryki indukowanej przez tensor Nijenhuisa

Pokażemy teraz, że spełnienie warunków sformułowanych w Twierdzeniu 5.4.1 pociąga za sobą zupełną całkowalność pewnych potoków geodezyjnych dwóch klas metryk na przestrzeniach jednorodnych. Pierwsza klasa metryk składa się z tak zwanych metryk normalnych. Metrykę G-niezmienniczą b na przestrzeni G/K, nazywamy *metryką normalną*, jeśli jest indukowana przez pewną dwuniezmienniczą metrykę na G, to znaczy przez pewną $\mathrm{Ad}\,G$-niezmienniczą formę dwuliniową B na $\mathfrak{g}$. Do drugiej rozważanej klasy należą metryki b_N na G/K, generowane przez tensor Nijenhuisa $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$, zdefiniowane wzorem:

$$b_N(X,Y) := b((N+N^*)X,Y), \quad X,Y \in \Gamma(T(G/K)). \tag{6.1}$$

Metryki b_N odpowiadają symetrycznemu $(1,1)$-tensorowi $N+N^*$, gdzie N^* jest sprzężeniem tensora Nijenhuisa N względem metryki normalnej, $b(N^*X,Y) = b(X,NY)$.

Twierdzenie 6.1.1 ([LP19])**.** *Podtrzymując założenia Twierdzenia* 5.4.1 *dodatkowo załóżmy spełnienie jednego z równoważnych warunków* (5.5)*,* (5.6)*. Niech b będzie G-niezmienniczą metryką normalną na G/K. Wtedy G-niezmiennicza metryka b_N na G/K generowana przez tensor Nijenhuisa oraz metryka normalna b posiadają zupełnie całkowalne potoki geodezyjne. Ponadto, całki pierwsze należą do klasy funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu.*

Dowód: Niech μ_{can} będzie odwzorowaniem momentu działania grupy Liego G na $T^*(G/K)$, względem kanonicznej struktury Poissona Π, natomiast f dowolnym wielomianem określonym na $\mathfrak{g}^*$, wtedy funkcje postaci $\mu_{\mathrm{can}}^* f$ są funkcjami analitycznymi i wielomianowymi względem zmiennych momentu. Analityczność wynika wprost z założenia, że f jest wielomianem. Fakt, że $\mu^*_{\mathrm{can}} f$ są wielomianami wynika z następującej argumentacji. Potraktujmy $\xi \in \mathfrak{g}$ jako funkcję liniową na $\mathfrak{g}^*$, wtedy $H_\xi = \mu^*_{\mathrm{can}}\xi$ jest hamiltonianem odpowiadającym fundamentalnemu polu wektorowemu V_ξ, które z kolei może być traktowane jako funkcja liniowa na każdym włóknie wiązki kostycznej $T^*(G/K)$ (zob. Definicja 5.3.1 i Uwaga 5.3.2). Zatem, jeśli f jest wielomianem względem ξ, to $\mu^*_{\mathrm{can}} f$ po ograniczeniu do dowolnego włókna jest funkcją wielomianową.

Z Twierdzenia 4.3.1(3) inwolutywny zbiór funkcji

$$\mathscr{I} := p^*\big(Z^{\{\Pi'_t\}}(M'_H)\big) \bigcup \mu^*_{t_0}\mathscr{F},$$

jest zbiorem zupełnym względem $\Pi_{t_0} = \Pi$. Należy zatem pokazać, że formy kwadratowe $q(X) := b(X,X)$ oraz $q_N(X) := b_N(X,X)$, $X \in \Gamma(T^*(G/K))$, są zawarte w tym zbiorze, po utożsamieniu $T(G/K)$ z $T^*(G/K)$ przy użyciu metryki b. Niech $Q(x) = B(x,x)$, $x \in \mathfrak{g}$, będzie formą kwadratową $\mathrm{Ad}\,G$-niezmienniczej formy dwuliniowej B na $\mathfrak{g}$. Stąd $Q \in Z^{\Pi_{\mathfrak{g}^*}}$, to znaczy Q jest funkcją Casimira na $\mathfrak{g}^*$, po utożsamieniu przestrzeni $\mathfrak{g}$ z $\mathfrak{g}^*$ przy pomocy B. Zatem z Twierdzenia 4.3.1(4) funkcja $\mu^*_{\mathrm{can}} Q$ należy do zbioru $\mathscr{I}$. Pokażemy, że $\mu^*_{\mathrm{can}} Q$ pokrywa się z q. Jest tak, ponieważ metryka normalna b należy do klasy tzw. metryk submersji otrzymanych z prawoniezmienniczych metryk na G, przez kanoniczną submersję $G \to G/K$. Wiadomo, że (zob. [BJ04b, Sekcja 7]) formy kwadratowe wszystkich metryk submersji są postaci $\mu^*_{\mathrm{can}} f$, gdzie f jest odpowiadającym wielomianem kwadratowym na $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$.

Aby udowodnić przynależność $q_N \in \mathscr{I}$ przypomnijmy, że z Twierdzenia 4.3.1(4) do zbioru $\mathscr{I}$ należą funkcje postaci $\mu^*_\lambda f$, dla $\lambda \neq \lambda_i$ oraz $f \in Z^{\Pi_{\mathfrak{g}^*}}$. Z równania (5.3) wynika równość $\mu_\lambda = \mu_{\mathrm{can}} \circ ((N-\lambda I)^{-1})^t$, zatem do $\mathscr{I}$ należą funkcje postaci:

$$b\left(((N-\lambda I)^{-1})^* X, ((N-\lambda I)^{-1})^* X\right) = b\left((N-\lambda I)^{-1}((N-\lambda I)^{-1})^* X, X\right),$$

dla $X \in \Gamma(T^*(G/K))$. Ponadto, zbiór $\mathscr{I}$ zawiera wszystkie współczynniki rozwinięcia Laurenta:

$$b\big((N-\lambda I)^{-1}\big((N-\lambda I)^{-1}\big)^* X, X\big) = \frac{1}{\lambda^2} b(X,X) + \frac{1}{\lambda^3} b((N+N^*)X,X) + \cdots, \tag{6.2}$$

odpowiadającego rozwinięciu $(N-\lambda I)^{-1} = -\big(\frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda^2} N + \cdots\big)$.

Ostatecznie, ponieważ $\big((N-\lambda I)^{-1}\big)^t$ jest odwzorowaniem liniowym we włóknach, więc funkcje postaci $\mu^*_\lambda f$ są wielomianami względem współrzędnych pędu, dla f będącej wielomianową funkcją Casimira kanonicznej struktury Poissona $\Pi_{\mathfrak{g}^*}$. □

6.2 Całkowalność potoków geodezyjnych dla rozkładów $(A_{2n-1}, C_n, A_{2n-2} \oplus T)$ oraz $(D_{n+1}, B_n, A_n \oplus T)$

Jako zastosowanie wyników poprzedniego rozdziału oraz poprzedniego podrozdziału, w szczególności Twierdzenia 6.1.1, pokażemy zupełną całkowalność potoków geodezyjnych metryk normalnych oraz metryk związanych z pewnymi operatorami Nijenhuisa dla dwóch serii przykładów przestrzeni jednorodnych, które nie były badane wcześniej pod kątem całkowalności potoków geodezyjnych. W tym celu będziemy musieli udowodnić, że założenia Twierdzenia 6.1.1 są spełnione.

W Tabeli 1 z Przykładu 5.2.5, spośród trójek $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ zwartych algebr Liego, dla których $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, rozpatrzmy dwie serie przykładów: $(A_{2n-1}, C_n, A_{2n-2} \oplus T)$ oraz $(D_{n+1}, B_n, A_n \oplus T)$. Dla obu tych serii pary $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i)$, $i = 1, 2$, są parami symetrycznymi, to znaczy, algebra Liego $\mathfrak{g}_i$ jest punktem stałym automorfizmu rzędu drugiego algebry Liego $\mathfrak{g}$ (por. [Hel01, Tabele II, III, Sekcja 6, Rozdział X]).

Poniżej przytoczymy Twierdzenie Brailova z [FT95, Twierdzenie 5, Sekcja 37] (zob. też [Pan07b, Wniosek 9.4]), które zapewnia spełnienie warunków (5.6) dla rozpatrywanych przykładów.

Twierdzenie 6.2.1. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego zawierającą symetryczną podalgebrę $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$. Wtedy:*

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \operatorname{ind} (\mathfrak{g}_0 \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)),$$

gdzie $\mathfrak{g}_0 \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)$ jest $\mathbb{Z}_2$-kontrakcją algebry Liego $\mathfrak{g}$, to znaczy sumą półprostą algebry Liego $\mathfrak{g}_0$ i przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ względem naturalnej reprezentacji dołączonej algebry Liego $\mathfrak{g}_0$ w $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$.

W szczególności, obie serie rozkładów $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ spełniają warunki (5.6) Twierdzenia 5.4.1. Pozwala to na sformułowanie następującego twierdzenia, w którym do wykazania pozostaje, że działanie grupy Liego G na $T^*(G/K)$ jest lokalnie swobodne.

Twierdzenie 6.2.2 ([LP19])**.** *Niech G/K będzie jedną z wymienionych niżej przestrzeni jednorodnych:*

(*a*) $\mathrm{SU}(2n)/(\mathrm{S}(\mathrm{U}(2n-1) \times \mathrm{U}(1)) \cap \mathrm{Sp}(n))$,

(*b*) $\mathrm{SO}(2n+2)/(\mathrm{SO}(2n+1) \cap \mathrm{U}(n+1))$.

Wówczas potok geodezyjny:

1. *metryki normalnej b na G/K oraz*
2. *metryki G-niezmienniczej b_N na G/K, odpowiadającej G-niezmienniczemu tensorowi Nijenhuisa $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$ o rzeczywistych wartościach własnych λ_1, λ_2,*

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \neq 0$, który zgodnie z Twierdzeniem 5.1.1 *odpowiada rozkładowi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$,*

są zupełnie całkowalne w klasie funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu.

Tu $\mathfrak{g}$ oraz $\mathfrak{k}$ są algebrami Liego grup G oraz K, trójki algebr $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ to odpowiednio $(A_{2n-1}, C_n, A_{2n-2} \oplus T)$ oraz $(D_{n+1}, B_n, A_n \oplus T)$. Jawne wyrażenie włożeń $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$ oraz rozkładu $\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$ przestrzeni dopełniającej do $\mathfrak{k}$ odpowiadającej rozkładowi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, jak również "operator bezwładności" $n_{\mathfrak{k}^\perp} + n^*_{\mathfrak{k}^\perp} = (N + N^*)|_{T_o(G/K) \cong \mathfrak{k}^\perp}$ (gdzie $o = P(e)$) prezentujemy w dodatku A.

Dowód: Należy pokazać, że spełnione są warunki Twierdzenia 6.1.1, zatem wykażemy, że działanie grupy Liego G na $T^*(G/K)$ jest lokalnie swobodne (co jest istotnym założeniem Twierdzeń 5.4.1 oraz 6.1.1). Jest to równoważne trywialności algebry Liego stabilizatora $\mathfrak{k}^E := \mathrm{stab}_\rho(E)$ wektora w położeniu ogólnym $E \in \mathfrak{k}^\perp$, względem działania izotropowego $\rho\colon \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{k}^\perp)$. Przez $\mathfrak{k}^\perp$ oznaczamy ortogonalne dopełnienie do $\mathfrak{k}$ względem (niezdegenerowanej) formy Killinga na $\mathfrak{g}$, oraz utożsamiamy działanie izotropowe i koizotropowe przy wykorzystaniu formy Killinga ograniczonej do $\mathfrak{k}^\perp$. Innymi słowy, $\mathfrak{k}^E$ pokrywa się z centralizatorem $Z_{\mathfrak{k}}(E)$ w $\mathfrak{k}$ elementu $E \in \mathfrak{k}^\perp$. W szczególności, ponieważ $\dim \mathfrak{k}^E$ jest funkcją półciągłą z dołu względem zmiany wektora E, wystarczy wskazać jeden element E, dla którego algebra Liego stabilizatora zanika, $\mathfrak{k}^E = \{0\}$. Dodatkowo zauważmy, że wystarczy wskazanie takiego elementu po dokonaniu kompleksyfikacji rozpatrywanego działania. Poniżej przedstawiamy w sposób jawny kompleksyfikacje $\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}\right)$ dla rozpatrywanych trójek algebr $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, jak również podprzestrzeni $\left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)^\perp$ dopełniającej do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ w $\mathfrak{g}^C$, względem formy Killinga. Ponadto, wskazujemy element $E \in \left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)^\perp$, dla którego $\mathrm{stab}_\rho(E) = \{0\}$ oraz dowodzimy ostatnią równość. Przypadki (a) i (b) rozpatrujemy osobno. W dalszej części będziemy stosować notację algebr Liego wykorzystującą czcionkę gotycką.

Przypadek (a): $(\mathfrak{a}_{2n-1}, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{a}_{2n-2} \oplus \mathfrak{t})$.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -{Z_1}^T \end{bmatrix} \middle| \; Z_2 = Z_2^T, Z_3 = Z_3^T \right\} \cong \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} Z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -t \end{bmatrix} \middle| \; \begin{matrix} Z \in \mathfrak{gl}(2n-1,\mathbb{C}), \\ t = \mathrm{Tr} Z \end{matrix} \right\} \cong \mathfrak{gl}(2n-1,\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A} & \mathbf{0} & \tilde{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & t & \mathbf{0}^T & 0 \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & -\tilde{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T & -t \end{bmatrix} \middle| \; \begin{matrix} \tilde{A},\tilde{B},\tilde{C} \in \mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C}), \\ \tilde{B} = \tilde{B}^T, \tilde{C} = \tilde{C}^T, \\ t \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\} \cong \mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{t},$$

$$\left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)^{\perp} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & \mathbf{v}_1 & B & \mathbf{v}_2 \\ \hline \mathbf{u}_1^T & a & \mathbf{u}_2^T & b \\ \hline C & \mathbf{v}_3 & A^T & \mathbf{v}_4 \\ \hline \mathbf{u}_3^T & c & \mathbf{u}_4^T & a \end{array} \right] \middle| \; \begin{matrix} \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{C}^{n-1}, \\ B = -B^T, C = -C^T, \\ a = -\mathrm{Tr} A, \, b, c \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}.$$

Działanie izotropowe $\rho\colon \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}\big(\mathfrak{k}^{\perp}\big)$ może być rozłożone na sumę dwóch niezmienniczych podprzestrzeni

$$V_1 := \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T & b \\ \hline C & \mathbf{0} & A^T & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & c & \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \right\}, \qquad V_2 := \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathbf{v}_1 & 0 & \mathbf{v}_2 \\ \hline \mathbf{u}_1 & 0 & \mathbf{u}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{v}_3 & 0 & \mathbf{v}_4 \\ \hline \mathbf{u}_3 & 0 & \mathbf{u}_4 & 0 \end{array} \right] \right\},$$

oraz trywialnej 1-wymiarowej reprezentacji, którą pominiemy.

Niech $\rho\colon \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$ oznacza reprezentację koizotropową o niezmienniczych podprzestrzeniach V_i oraz niech $E_i \in V_i$. Wtedy $\mathrm{stab}_{\rho}(E_1 + E_2) = \mathrm{stab}_{\tilde{\rho}}(E_2)$, gdzie $\tilde{\rho} := \rho|_{\mathrm{stab}_{\rho}(E_1)}$.

Wybierzmy element:

$$\mathfrak{k}^{\perp} \ni E_1 = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{nil} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & A_{nil}^T & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \qquad A_{nil} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

tu A_{nil} jest standardową macierzą nilpotentną wymiaru $(n-1)\times(n-1)$. Wtedy algebra Liego stabilizatora $\mathrm{stab}_\rho(E_1)$ składa się z macierzy postaci:

$$Y = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & -A^T & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & a_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ \vdots & \iddots & b_{n-1} & \\ b_{n-2} & \iddots & & \\ b_{n-1} & & & \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} & & & c_1 \\ & & c_1 & c_2 \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dobierzmy teraz $E_2 \in V_2$ taki, że $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1^T = (1,\dots,1)$ a pozostałe $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{u}_i$, $i>1$ są wektorami zerowymi. Wówczas, dla dowolnego ustalonego $Y \in \mathrm{stab}_\rho(E_1)$ otrzymujemy:

$$[E_2, Y] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{v} & 0 & \mathbf{w}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{w}_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

gdzie:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1+\dots+a_{n-2}+a_{n-1} \\ a_1+\dots+a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1+a_2 \\ \vdots \\ a_1+a_2+\dots+a_{n-1} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_1 = -\begin{bmatrix} c_1+c_2+\dots+c_{n-1} \\ c_2+\dots+c_{n-1} \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} b_1+b_2+\dots+b_{n-1} \\ b_2+\dots+b_{n-1} \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}^T.$$

Zatem, jeśli $Y \in \mathrm{stab}_{\tilde{\rho}}(E_2)$, to $a_i=0$, $b_i=0$, oraz $c_i=0$ dla $i=1,\dots,n-1$, co pociąga za sobą $\mathrm{stab}_\rho(E)=\{0\}$ dla $E := E_1+E_2$.

Przypadek (b): $(\mathfrak{d}_{n+1}, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{t})$.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1{}^T \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} Z_i \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}), \\ Z_2 = -Z_2^T, Z_3 = -Z_3^T \end{array} \right\} \cong \mathfrak{so}(2n+2,\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathbf{u}^T & 0 & \mathbf{v}^T \\ \hline -\mathbf{v} & W_1 & -\mathbf{v} & W_2 \\ \hline 0 & \mathbf{u}^T & 0 & \mathbf{v}^T \\ \hline -\mathbf{u} & W_3 & -\mathbf{u} & -W_1^T \end{array} \right] \middle| \begin{array}{c} W_2 = -W_2^T, W_3 = -W_3^T, \\ \mathbf{v},\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \end{array} \right\} \cong \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \middle| \tilde{A} \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}) \right\} \cong \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \left\{ Y := \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & -A^T \end{array} \right] \middle| A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \right\} \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),$$

$$\left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)^{\perp} = \left\{ Z := \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} a & \mathbf{u}^T \\ \hline -\mathbf{v} & 0 \end{array} & Z_2 \\ \hline Z_3 & \begin{array}{c|c} -a & \mathbf{v}^T \\ \hline -\mathbf{u} & 0 \end{array} \end{array} \right] \middle| \begin{array}{c} Z_2 = -Z_2^T, Z_3 = -Z_3^T, \\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \\ a \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

Ustalmy dowolny $Y \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ oraz wybierzmy $Z \in \left(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\right)^{\perp}$ taki, że:

$$Z_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{w}_2^T \\ \hline -\mathbf{w}_2 & B \end{array} \right], \qquad Z_3 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{w}_3^T \\ \hline -\mathbf{w}_3 & C \end{array} \right],$$

przy czym macierze B i C są skośnie-symetryczne, wymiaru $n \times n$. Wtedy, komutator Y i Z jest następującej postaci:

$$[Y,Z] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -\mathbf{u}^T A & 0 & (A\mathbf{w}_2)^T \\ \hline A\mathbf{v} & 0 & -A\mathbf{w}_2 & AB + BA^T \\ \hline 0 & -\mathbf{w}_3^T A & 0 & -(A\mathbf{v})^T \\ \hline A^T\mathbf{w}_3 & -(A^T C + CA) & A^T\mathbf{u} & 0 \end{array} \right].$$

Pokażemy teraz zanikanie algebry Liego stabilizatora elementu:

$$E = \left[\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array} \right] \in \mathfrak{k}^{\perp}, \qquad J = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że warunki $A\mathbf{w}_2 = 0$, $A^T\mathbf{w}_3 = 0$ dla $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3 = (1,0,\dots,0)^T$ wymuszają zanikanie elementów $a_{1,i} = 0$, $a_{i,1} = 0$, macierzy $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. Czyli, dla dowolnego $Y \in \mathrm{stab}_\rho(E) \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, w podmacierzy A pierwszy wiersz i pierwsza kolumna są wypełnione zerami:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right],$$

gdzie teraz $A_{n-1} \in \mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C})$. Element Y z takim blokiem A, należy do algebry Liego stabilizatora $\mathrm{stab}_\rho(E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie:

$$AB + BA^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n,2} \\ 0 & -a_{22} & 0 & * & * & * \\ 0 & -a_{32} & * & 0 & * & * \\ 0 & \vdots & * & * & \ddots & * \\ 0 & -a_{n,2} & * & * & * & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

oraz

$$A^TC + CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & -a_{22} & 0 & * & * & * \\ 0 & -a_{23} & * & 0 & * & * \\ 0 & \vdots & * & * & \ddots & * \\ 0 & -a_{2,n} & * & * & * & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Zatem macierz A musi być postaci:

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{n-2} \end{array}\right],$$

gdzie tym razem $A_{n-2} \in \mathfrak{gl}(n-2,\mathbb{C})$. Kontynuując procedurę wnioskujemy, że macierz A jest macierzą zerową, a to oznacza zanikanie algebry stabilizatora $\mathrm{stab}_\rho(E) = \{0\}$, co kończy dowód. $\square$

6.3 Całkowalność potoków geodezyjnych dla rozkładów $(A_{2n-1}, C_n, A_{2n-2})$ oraz (D_{n+1}, B_n, A_n)

Rozpatrzymy teraz zupełną całkowalność potoków geodezyjnych związanych z trójkami algebr $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ kolejnych dwóch serii przykładów z Tabeli 1, odpowiednio $(A_{2n-1}, C_n, A_{2n-2})$ oraz (D_{n+1}, B_n, A_n). W obu przypadkach pary $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1)$ są parami symetrycznymi ([Hel01, Tabele II, III, Sekcja 6, Rozdział X]), zatem z Twierdzenia Brailova 6.2.1 zachodzi równość $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = \operatorname{ind}(\mathfrak{g}_1 \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1))$. Z drugiej strony, wiadomo, że zarówno (A_{2n-1}, A_{2n-2}) oraz (D_{n+1}, A_n) nie są parami symetrycznymi, czyli nie możemy wprost zastosować schematu z poprzedniego podrozdziału. Jednakże z klasyfikacji [Myk87, Tabela 2] wynika, że (A_{2n-1}, A_{2n_2}) oraz (D_{n+1}, A_n) są parami sferycznymi. Mówimy, że (G, H) jest *parą sferyczną*, jeśli generyczna orbita podgrupy Borela $B \subset G$ jest zbiorem otwartym w G/H. Oznaczmy, przez $c(G/H)$ minimalny kowymiar orbity działania podgrupy Borela $B \subset G$ na przestrzeni jednorodnej G/H.

Twierdzenie 6.3.1 ([Pan07b], Propozycja 9.3(1))**.** *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego oraz $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus V$ sumą prostą algebry $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}$-niezmienniczej przestrzeni wektorowej V, względem działania dołączonego* $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}$. *Wtedy zachodzi równość:*

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{h} \ltimes V) = \operatorname{ind}\mathfrak{g} + 2c(G/H).$$

W szczególności, $\operatorname{ind}(\mathfrak{h} \ltimes V) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy H jest sferyczną podgrupą G.*

Na mocy powyższego twierdzenia, dla rozpatrywanych trójek algebr spełnione są warunki (5.6) równości indeksów $\operatorname{ind}(\mathfrak{h} \ltimes V) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Aby skorzystać z Twierdzenia 6.2.2, wystarczy pokazać, że działanie G na $T^*(G/K)$ jest lokalnie swobodne, istotnie jest tak. Dowód przebiega analogicznie jak w Twierdzeniu 6.2.2, uwzględnienia wymaga drobna zmiana reprezentacji algebr Liego $\mathfrak{g}_2$. Zatem zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.3.2. *Niech G/K będzie jedną z wymienionych niżej przestrzeni jednorodnych:*
(a) *$SU(2n)/Sp(2n-2)$,*
(b) *$SO(2n+2)/SU(n)$.*
Wówczas potoki geodezyjne:

1. *metryki normalnej b na G/K oraz*
2. *metryki G-niezmienniczej b_N na G/K, odpowiadającej G-niezmienniczemu tensorowi Nijenhuisa $N\colon T(G/K) \to T(G/K)$ o rzeczywistych wartościach własnych λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \neq 0$, który zgodnie z Twierdzeniem* 5.1.1 *odpowiada rozkładowi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$,*

są zupełnie całkowalne w klasie funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu.

6.4 Pozostałe serie rozkładów z listy Onishchika

W przypadku trzech serii trójek algebr Liego $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ z Tabeli 1: (D_{2n}, B_{2n-1}, C_n), $(D_{2n}, B_{2n-1}, C_n \oplus T)$, $(D_{2n}, B_{2n-1}, C_n \oplus A_1)$ warunki (5.6) Twierdzenia 5.4.1 nie są spełnione, jest tak z powodu zbyt dużej różnicy wymiarów między algebrami Liego $\mathfrak{g}$ oraz $\mathfrak{g}_2$. Istotnie, oznaczmy przez V przestrzeń wektorową będącą dopełnieniem do $\mathfrak{g}_2$ w $\mathfrak{g}$. Niech $\mathfrak{g}_2 \ltimes V$ będzie sumą półprostą względem działania izotropowego $\rho : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$. Na podstawie uogólnionego wzoru Raïsa [Pan07a], dla $\alpha \in V^*$ mamy:

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{g}_2 \ltimes_\rho V\big) = \operatorname{ind}\left(\mathfrak{g}_2^\alpha, \gamma_\alpha\right) + \operatorname{codim}_{V^*} \mathscr{O}_{\rho^*}(\alpha),$$

gdzie $\operatorname{ind}(\mathfrak{g}_2^\alpha, \gamma_\alpha)$ oznacza minimalny kowymiar liści symplektycznych afinicznej struktury Poissona $\Pi_{\gamma_\alpha} := \Pi_{\mathfrak{g}_2^*} + \hat{\gamma}_\alpha$ na $(\mathfrak{g}_2^\alpha)^*$, zadanej przy wykorzystaniu stałej struktury Poissona $\hat{\gamma}_\alpha$ zdefiniowanej przez 2-kocykl algebry Liego $\gamma_\alpha \in H^2(\mathfrak{g}_2^\alpha)$ (tutaj $\mathfrak{g}_2^\alpha$ oznacza stabilizator elementu $\alpha \in V^*$ względem działania ρ^*), oraz $\mathscr{O}_{\rho^*}(\alpha)$ oznacza orbitę elementu α w V^* względem działania koizotropowego V^*. Ponieważ, $\operatorname{codim}_{V^*} \mathscr{O}_{\rho^*}(\alpha) = \dim V^* - \big(\dim \mathfrak{g}_2 - \dim \mathfrak{g}_2^\alpha\big)$, więc:

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{g}_2 \ltimes_\rho V\big) = \operatorname{ind}\left(\mathfrak{g}_2^\alpha, \gamma_\alpha\right) + \dim \mathfrak{g}_2^\alpha + \dim V^* - \dim \mathfrak{g}_2 \geq \dim V^* - \dim \mathfrak{g}_2$$

Przypomnijmy, że $\operatorname{ind} \mathfrak{so}(4n, \mathbb{C}) = 2n$, natomiast dla $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(4n, \mathbb{C})$ oraz $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mamy odpowiednio $\dim \mathfrak{g} = 8n^2 - 2n$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 2n^2 + n + 3$, oraz $\dim V^* = 6n^2 - 3n - 3$. Zatem $\dim V^* - \dim \mathfrak{g}_2 = 4n^2 - 4n - 6 > 2n$ dla $n > 2$, podobnie w pozostałych przypadkach. Dla każdej z trzech serii (D_{2n}, B_{2n-1}, C_n), $(D_{2n}, B_{2n-1}, C_n \oplus T)$, $(D_{2n}, B_{2n-1}, C_n \oplus A_1)$, przy $n > 2$:

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{g}_2 \ltimes_\rho V\big) > \operatorname{ind} \mathfrak{g},$$

czyli wymagane do zastosowania Twierdzenia 6.1.1 algebraiczne warunki 5.6 nie mogą być spełnione.

6.5 Całkowalność potoków geodezyjnych na rozmaitości flag zupełnych

Dla dowolnej przestrzeni liniowej V wymiaru n, *flagą* nazywa się ciąg podprzestrzeni liniowych $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{k-1} \subset V_k = V$. Flaga jest *zupełna*, jeśli $\dim V_i = i$ (wówczas $k = n$), przez $F_n(\mathbb{C})$ oznaczmy zbiór flag zupełnych przestrzeni $V = \mathbb{C}^n$. Rozpatrzymy F_0 flagę zupełną generowaną przez bazę standardową $e_1, \ldots, e_n$, to znaczy, dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$ podprzestrzeń V_i jest generowana przez wektory $e_1, \ldots, e_i$. Grupa Liego $GL(n, \mathbb{C})$ działa tranzytywnie na przestrzeni $F_n(\mathbb{C})$, a stabilizatorem flagi F_0 jest podgrupa B odwracalnych macierzy górnotrójkątnych. Podgrupa $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ również działa tranzytywnie na $F_n(\mathbb{C})$, w tym przypadku stabilizatorem F_0 jest podgrupa T macierzy diagonalnych o elementach będących liczbami zespolonymi o module jeden. A zatem przestrzeń flag $F_n(\mathbb{C})$ jest przestrzenią jednorodną, która może być utożsamiona z przestrzenią ilorazową $GL(n,\mathbb{C})/B$ lub $U(n)/T$.

Definicję przestrzeni flag można zaadoptować (zob. [Ale97, CS09, Bes87]) na przypadek zwartych grup Liego. Dla zwartej grupy Liego G, istnieje skończona liczba podgrup Liego G_i, $1 \leq i \leq k$, takich, że każda orbita dołączona jest izomorficzna z przestrzenią ilorazową G/G_i. Przy czym, dla ustalonej maksymalnej abelowej podgrupy (maksymalnego torusa) T w G, podgrupy G_i mogą być wybrane tak, aby $T \subseteq G_i \subseteq G$.

Jeśli wybrać podgrupę Borela $B \subset G^c$ tak, żeby zawierała torus maksymalny T w G, to działanie grupy G na G^c/B jest tranzytywne, a stabilizator warstwy eB pokrywa się z przecięciem $B \cap G = T$ ([Kir04, Rozdział 1, Lemat 5]). Dokładniej, istnieje kanoniczny dyfeomorfizm między G/T i G^c/B, który jest opisany np. w [CS09, Propozycja 3.2.6]. W szczególności na każdej rozmaitości flag istnieje kanoniczna struktura zespolona, której użyjemy niżej.

Definicja 6.5.1. Przestrzeń jednorodną G/T nazywamy *rozmaitością flag zupełnych*, gdy T jest maksymalną abelową podgrupą zwartej grupy Liego G.

Ponieważ rozmaitości flag to szczególny przypadek orbit działania dołączonego zwartej grupy Liego G, wiadomo [BJ01, MP04], że na przestrzeniach flag metryka normalna ma zupełnie całkowalny potok geodezyjny. Prezentowana w rozprawie metoda konstrukcji całek pierwszych zastosowana do przestrzeni flag zupełnych, daje dowód całkowalności metryki normalnej, różny od przedstawionych w [BJ01, MP04]. Skorzystamy tutaj ze struktury zespolonej J na G/T, jako tensora Nijenhuisa, i z odpowiedniego szeregu naszych wyników.

Twierdzenie 6.5.1. *Potok geodezyjny metryki normalnej na rozmaitości flag zupełnych G/T jest zupełnie całkowalny w klasie funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu.*

Dowód: Wiadomo (zob. [MP04]), że działanie grupy G na $T^*(G/T)$ jest lokalnie swobodne, zatem to podstawowe założenie Twierdzenia 5.4.1 jest spełnione.

Oznaczmy przez $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ algebry Liego grup G, T oraz przez $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ odpowiednie kompleksyfikacje. Rozważmy liniowy operator opisany w Przykładzie 5.2.3: $j\colon \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$, gdzie $\mathfrak{v} := \sum\limits_{\alpha \in R^+} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \sum\limits_{\alpha \in R^+} \mathbb{R}(\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha}))$, zadany następująco: $j(E_\alpha - E_{-\alpha}) = \mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})$, $j(\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})) = -(E_\alpha - E_{-\alpha})$. Wówczas $j^{\mathbb{C}}(E_\alpha) = \mathrm{i}E_\alpha$, $j^{\mathbb{C}}(E_{-\alpha}) = -\mathrm{i}E_{-\alpha}$.

Operator j przez lewe przesunięcia zadaje G-niezmienniczy tensor Nijenhuisa (całkowalną strukturę zespoloną) na rozmaitości flag G/T, oznaczmy go przez J. Odpowiadający (wg. Twierdzenia 5.1.1) operatorowi J rozkład kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ na sumę podalgebr wyglada następująco: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, gdzie $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum\limits_{\alpha \in R^+} \mathbb{C}E_\alpha$, $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{b}_- =$

$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in R^+} \mathbb{C}E_{-\alpha}$, są dwoma przeciwnymi podalgebrami Borela w $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ zawierającymi kompleksyfikację maksymalnego torusa $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ oraz $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

Na podstawie dowodu Twierdzenia 4.1 z [Pan06] (zob. też [PY13, Twierdzenie 3.1]) wiadomo, że indeks półprostej sumy algebry Liego $\mathfrak{b}_{\pm}$ i przestrzeni wektorowej $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}_{\pm})$, względem działania dołączonego $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{b}_{\pm} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}_{\pm})$ jest równy indeksowi algebry Liego $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$: $\mathrm{ind}\,(\mathfrak{b}_{\pm} \ltimes (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}_{\pm})) = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Zatem warunki algebraiczne (5.6) są spełnione i na podstawie Twierdzenia 6.1.1 otrzymujemy całkowalność potoku geodezyjnego metryki normalnej w klasie funkcji analitycznych, wielomianowych względem zmiennych pędu. $\square$

Uwaga 6.5.1. W przeciwieństwie do wcześniej omawianych przykładów tensorów Nijenhuisa, symetryzacja struktury zespolonej zanika $J + J^* = 0$, z tego powodu metryka zadana wzorem (6.1) jest trywialna. Z drugiej strony zanikanie $J + J^*$ powoduje, że uzyskana rodzina całek pierwszych dla potoku geodezyjnego metryki normalnej b, oprócz formy kwadratowej $b(X,X)$ nie zawiera innych hamiltonianów kwadratowych (gdyż szereg (6.2) trywializuje się). Ten fakt pozwala stwierdzić, że uzyskana rodzina całek pierwszych istotnie różni się od tych uzyskanych w [BJ01, MP04] (przypomnijmy, że potok geodezyjny metryki normalnej jest całkowalny w sposób nieprzemienny [BJ01], co oznacza, że zupełne i przemienne rodziny całek pierwszych mogą być budowane na różne sposoby).

7 Wnioski i dalsze perspektywy

Uwzględnione w Twierdzeniach 4.3.1 i 5.4.1 założenia zwartości grup Liego G i K zostały użyte w celu gwarancji istnienia kompleksyfikacji przestrzeni jednorodnej G/K, a w konsekwencji również innych związanych z nią obiektów, oraz zapewnienia istnienia G-niezmienniczego otwartego i gęstego zbioru M_0 w $M = T^*(G/K)$ (tj. M_H) dla którego, przestrzeń orbit M_0/G jest gładką rozmaitością. Założenie o zwartości może być osłabione (ponieważ powyższe warunki mogą być osiągnięte w szerszej klasie grup Liego) zachowując wnioski twierdzenia. Dyskusje na ten temat pominiemy gdyż, główne zastosowanie (Twierdzenie 6.2.2) dotyczy klasy zwartych przestrzeni jednorodnych.

Warunek wymagający od działania grupy Liego G na $T^*(G/K)$, aby było lokalnie swobodne, istotny w Twierdzeniach 4.3.1, 5.4.1 oraz 6.1.1 dające warunki wystarczające do zupełnej całkowalności, może być pominięty przy wykorzystaniu specjalnej metody redukcji, przejścia z grup Liego G i K do odpowiednich mniejszych podgrup Liego, patrz [MP04] oraz [Myk21].

Dalszych badań wymaga przypadek, gdy nie są spełnione warunki (5.6) (por. 6.4). Wtedy kanoniczny zbiór funkcji $\mathscr{I}$ (zob. (4.2)), związany z redukcją struktury bihamiltonowskiej *nie jest zupełny*. Jednakże, bazując na badaniach zamieszczonych w artykule [Pan09] opisującym struktury bihamiltonowskie związane z pękami Liego (a więc redukcjami $(T^*(G/K), \Pi, \Pi_1)$ z trywialną grupą Liego K) można spodziewać się istnienia dodatkowych symetrii w takim przypadku, a w konsekwencji, dodatkowych całek Noether. Wówczas można postawić pytanie o warunki wystarczające na zupełność rodziny funkcji $\mathscr{I}$ rozszerzonej o dodatkowe całki.

A Formy rzeczywiste trójek algebr

Poniżej prezentujemy realizacje macierzową zwartych form rzeczywistych trójek algebr $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ wykorzystanych w Twierdzeniu 6.2.2, ich rozkładów na podprzestrzenie $\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$ dopełniające do podprzestrzeni $\mathfrak{k}$ względem formy Killinga, indukowanych przez rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, gdzie $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{k}^\perp$, oraz wzory na „operator bezwładności” $\mathrm{n}_{\mathfrak{k}^\perp} + \mathrm{n}^*_{\mathfrak{k}^\perp} \colon \mathfrak{k}^\perp \to \mathfrak{k}^\perp$ indukowany przez operator $\mathrm{n}_{\mathfrak{k}^\perp} \colon \mathfrak{k}^\perp \to \mathfrak{k}^\perp$, $\mathrm{n}_{\mathfrak{k}^\perp}|_{\mathfrak{k}_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathfrak{k}_i}$. W obu przypadkach operatory bezwładności są dodatnio określone, jeśli zachodzą poniższe warunki:

$$0 < \lambda_1, \qquad 0 < \lambda_2, \qquad \frac{\lambda_1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} < \lambda_2 < \frac{\lambda_1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}.$$

Przypadek $(\mathfrak{a}_{2n-1}, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{a}_{2n-2} \oplus \mathfrak{t})$.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2n) = \left\{ A \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, A = -\overline{A}^T \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 \end{bmatrix} \,\middle|\, Z_1 = -\overline{Z}_1^T, Z_2 = Z_2^T \right\} \cong \mathfrak{sp}(n),$$

$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} Z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -t \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} Z \in \mathfrak{u}(2n-1), \\ t = \operatorname{Tr} Z \end{matrix} \right\} \cong \mathfrak{su}(2n-1) \oplus \mathfrak{t},$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} Z_1 & \mathbf{0} & Z_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & \mathrm{i}t & \mathbf{0}^T & 0 \\ \hline -\overline{Z}_2 & \mathbf{0} & \overline{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T & -\mathrm{i}t \end{array} \right] \,\middle|\, \begin{matrix} Z_i \in \mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C}), \\ Z_1 = -\overline{Z}_1^T, Z_2 = Z_2^T, \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \cong \mathfrak{sp}(n-1) \oplus \mathfrak{t},$$

$$\mathfrak{k}^\perp = \left\{ X := \left[\begin{array}{c|c|c|c} Z_1 & \mathbf{v} & Z_2 & \mathbf{u} \\ \hline -\overline{\mathbf{v}}^T & a & \mathbf{u_1}^T & z \\ \hline \overline{Z}_2 & -\overline{\mathbf{u}}_1 & -\overline{Z}_1 & \mathbf{v}_1 \\ \hline -\overline{\mathbf{u}}^T & -\overline{z} & -\overline{\mathbf{v}}_1^T & a \end{array} \right] \,\middle|\, \begin{matrix} Z_1 = -\overline{Z}_1^T, Z_2 = -Z_2^T, \\ \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^{n-1}, \\ z \in \mathbb{C}, a = -\operatorname{Tr} Z_1 \end{matrix} \right\},$$

$$\mathfrak{k}_1 = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathbf{v} & 0 & \mathbf{u} \\ \hline -\overline{\mathbf{v}}^T & 0 & \mathbf{u}^T & z \\ \hline 0 & -\overline{\mathbf{u}} & 0 & \overline{\mathbf{v}} \\ \hline -\overline{\mathbf{u}}^T & -\overline{z} & -\mathbf{v}^T & 0 \end{array} \right] \right\}, \qquad \mathfrak{k}_2 = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} Z_1 & \mathbf{v}_1 & Z_2 & 0 \\ \hline -\overline{\mathbf{v}}_1^T & a & \mathbf{u}_1^T & 0 \\ \hline \overline{Z}_2 & -\overline{\mathbf{u}}_1 & -\overline{Z}_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right] \,\middle|\, a = -\operatorname{Tr} Z_1 \right\},$$

$$\frac{1}{2}\left(n_{\mathfrak{k}^\perp}+n^*_{\mathfrak{k}^\perp}\right)X=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\lambda_2 Z_1 & \begin{array}{c}\lambda_2\mathbf{v}\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{v}}_1\end{array} & \lambda_2 Z_2 & \begin{array}{c}\lambda_1\mathbf{u}\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{u}_1\end{array}\\ \hline
\begin{array}{c}-\lambda_2\overline{\mathbf{v}}^T\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{v}_1^T\end{array} & \lambda_2 a & \begin{array}{c}\lambda_2\mathbf{u_1}^T\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{u}^T\end{array} & \lambda_1 z\\ \hline
\lambda_2\overline{Z}_2 & \begin{array}{c}-\lambda_2\overline{\mathbf{u}}_1\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{u}}\end{array} & -\lambda_2\overline{Z}_1 & \begin{array}{c}\lambda_1\mathbf{v}_1\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{v}}\end{array}\\ \hline
\begin{array}{c}-\lambda_1\overline{\mathbf{u}}^T\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{u}}_1^T\end{array} & -\lambda_1\overline{z} & \begin{array}{c}-\lambda_1\overline{\mathbf{v}}_1^T\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{v}^T\end{array} & \lambda_2 a
\end{array}\right].$$

Przypadek $(\mathfrak{d}_{n+1},\mathfrak{b}_n,\mathfrak{a}_n\oplus\mathfrak{t})$,

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{bmatrix}W & Z\\ \overline{Z} & \overline{W}\end{bmatrix}\,\middle|\,\begin{array}{c}Z,W\in\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}),\\ W=-\overline{W}^T,\,Z=-Z^T\end{array}\right\}\cong\mathfrak{so}(2n+2,\mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{g}_1=\left\{\left[\begin{array}{c|c|c|c}0 & \mathbf{u}^T & 0 & \overline{\mathbf{u}}^T\\ \hline -\overline{\mathbf{u}} & W_1 & -\overline{\mathbf{u}} & Z_1\\ \hline 0 & \mathbf{u}^T & 0 & \overline{\mathbf{u}}^T\\ \hline -\mathbf{u} & \overline{Z}_1 & -\mathbf{u} & \overline{W}_1\end{array}\right]\,\middle|\,\begin{array}{c}Z_1,W_1\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\\ Z_1=-Z_1^T,\,W_1=-\overline{W}_1^T,\\ \mathbf{u}\in\mathbb{C}^n\end{array}\right\}\cong\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{g}_2=\left\{\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & -A^T\end{bmatrix}\,|A\in\mathfrak{u}(n+1)\right\}\cong\mathfrak{u}(n+1),$$

$$\mathfrak{k}=\left\{\left[\begin{array}{c|c|c|c}0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T\\ \hline \mathbf{0} & W_1 & \mathbf{0} & 0\\ \hline 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T\\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \overline{W}_1\end{array}\right]\,\middle|\,W_1=-\overline{W}_1^T\right\}\cong\mathfrak{u}(n),$$

$$\mathfrak{k}^\perp=\left\{X:=\left[\begin{array}{c|c|c|c}\mathrm{i}a & \mathbf{u}^T & 0 & \overline{\mathbf{v}}^T\\ \hline -\overline{\mathbf{u}} & 0 & -\overline{\mathbf{v}} & Z_1\\ \hline 0 & \mathbf{v}^T & -\mathrm{i}a & \overline{\mathbf{u}}^T\\ \hline -\mathbf{v} & \overline{Z}_1 & -\mathbf{u} & 0\end{array}\right]\,\middle|\,\begin{array}{c}Z=-Z^T,\\ a\in\mathbb{R},\\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{k}_1=\left\{\left[\begin{array}{c|c|c|c}0 & \mathbf{u}^T & 0 & \overline{\mathbf{u}}^T\\ \hline -\overline{\mathbf{u}} & 0 & -\overline{\mathbf{u}} & Z_1\\ \hline 0 & \mathbf{u}^T & 0 & \overline{\mathbf{u}}^T\\ \hline -\mathbf{u} & \overline{Z}_1 & -\mathbf{u} & 0\end{array}\right]\right\},\qquad \mathfrak{k}_2=\left\{\left[\begin{array}{c|c}\begin{array}{c|c}\mathrm{i}a & \mathbf{u}_1^T\\ \hline -\overline{\mathbf{u}}_1 & 0\end{array} & 0\\ \hline 0 & \begin{array}{c|c}-\mathrm{i}a & \overline{\mathbf{u}}_1^T\\ \hline -\mathbf{u}_1 & 0\end{array}\end{array}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{2}\left(n_{\mathfrak{k}^\perp}+n^*_{\mathfrak{k}^\perp}\right)X=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\lambda_2 \mathrm{i} a & \begin{array}{c}\lambda_1\mathbf{u}^T\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{v}}^T\end{array} & 0 & \begin{array}{c}\lambda_1\overline{\mathbf{v}}^T\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{u}^T\end{array} \\ \hline
\begin{array}{c}-\lambda_1\overline{\mathbf{u}}\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{v}\end{array} & 0 & \begin{array}{c}-\lambda_1\overline{\mathbf{v}}\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{u}\end{array} & \lambda_1 Z_1 \\ \hline
0 & \begin{array}{c}\lambda_1\mathbf{v}^T\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{u}}^T\end{array} & -\lambda_2 \mathrm{i} a & \begin{array}{c}\lambda_1\overline{\mathbf{u}}^T\\ +\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\mathbf{v}^T\end{array} \\ \hline
\begin{array}{c}-\lambda_1\mathbf{v}\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{u}}\end{array} & \lambda_1\overline{Z}_1 & \begin{array}{c}-\lambda_1\mathbf{u}\\ -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\overline{\mathbf{v}}\end{array} & 0
\end{array}\right].$$

B Kompleksyfikacja obiektów analitycznych

Rzeczywistą analityczną podrozmaitość M, $\dim_{\mathbb{R}} M = n$, zespolonej rozmaitości M^c, $\dim_{\mathbb{C}} M^c = n$, nazywamy *maksymalną całkowicie rzeczywistą*, jeśli w otoczeniu dowolnego punktu M istnieje holomorficzny układ współrzędnych $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, taki, że M jest lokalnie zadana przez $y_j = 0, j = 1, \ldots, n$. Mówimy wtedy, że M^c jest a *kompleksyfikacją* rozmaitości M oraz M jest *formą rzeczywistą* M^c. Holomorficzny układ współrzędnych jak powyżej nazywamy *stowarzyszonym* z M. Wiadomo, że kompleksyfikacja M^c istnieje dla dowolnej rzeczywistej rozmaitości analitycznej M (zob. [WB59]). Kompleksyfikacja jest określona niejednoznacznie, ale kiełek kompleksyfikacji wokół M jest określony jednoznacznie z dokładnością do odwzorowania biholomorficznego (zachowującego M).

Niech M oznacza rzeczywistą rozmaitość analityczną, a M^c pewną jej kompleksyfikację. Dowolny rzeczywisty analityczny tensor T zadany na M może być jednoznacznie rozszerzony do holomorficznego tensora T^c zdefiniowanego w otoczeniu M w M^c, przez rozszerzenie współczynników do funkcji holomorficznych oraz rozpatrywanie w stowarzyszonym układzie współrzędnych $\frac{\partial}{\partial z_j}$ i $\mathrm{d}z_j$, zamiast $\frac{\partial}{\partial x_j}$ i $\mathrm{d}x_j$. I odwrotnie, jeśli mamy holomorficzny tensor T^c na M^c taki, że w stowarzyszonym układzie współrzędnych współczynniki ograniczone do M są rzeczywiste, wówczas T^c holomorficznym rozszerzeniem pewnego rzeczywistego analitycznego tensora T na M.

Ponadto, jeśli struktura bihamiltonowska $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$, $\Pi_t = t_1\Pi_1 + t_2\Pi_2$, jest rzeczywistą analityczną strukturą na M, wówczas jest typu Kroneckera w punkcie $m \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej holomorficzne rozszerzenie $\{\Pi^c\}_{t\in\mathbb{C}^2}$, $\Pi_t^c = t_1\Pi_1^c + t_2\Pi_2^c$ jest typu Kroneckera w $m \in M^c$.

C Podstawowe pojęcia dotyczące grup i algebr Liego

Poniżej przedstawiamy podstawowe definicje i twierdzenia związane z algebrami Liego, grupami Liego i ich działaniami na rozmaitościach. Rozdział został przygotowany w oparciu o monografie [Hal15], [Hel01] oraz zbiór zadań [GMM13].

C.1 Algebry Liego

Definicja C.1.1. *(Abstrakcyjną) algebrą Liego* nazywamy przestrzeń liniową $\mathfrak{g}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ z określonym dwuliniowym działaniem $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, nazywanym *nawiasem Liego*, spełniającym następujące warunki, dla dowolnych $x,y,z\in\mathfrak{g}$:

1. $[x,y]=-[y,x]$ (skośna-symetria),
2. $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ (tożsamość Jacobiego).

Algebrę Liego oznaczamy $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ lub krócej $\mathfrak{g}$, jeśli określenie nawiasu Liego nie budzi wątpliwości.

Definicja C.1.2. Algebrę Liego $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ nazywamy *abelową* lub *przemienną*, jeśli $[x,y]=0$ dla dowolnych $x,y\in\mathfrak{g}$.

Definicja C.1.3. *Podalgebrą Liego* algebry Liego $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ nazywamy podprzestrzeń liniową $\mathfrak{h}$ zamkniętą względem nawiasu Liego: dla dowolnych $x,y\in\mathfrak{h}$, również $[x,y]\in\mathfrak{h}$.

Definicja C.1.4. *Centrum* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *algebry Liego* $\mathfrak{g}$ nazywamy zbiór wszystkich elementów $x\in\mathfrak{g}$ takich, że zanika nawias Liego $[x,y]=0$ dla dowolnego $y\in\mathfrak{g}$.

Definicja C.1.5. *Centralizatorem elementu* $x\in\mathfrak{g}$ *w algebrze Liego* $\mathfrak{g}$ nazywamy podprzestrzeń $Z(x):=\{y\in\mathfrak{g}\mid[x,y]=0\}$.

Z tożsamości Jacobiego, łatwo widać, że centrum oraz centralizator są podalgebrami Liego.

Definicja C.1.6. Mówimy, że symetryczna forma dwuliniowa $(\cdot,\cdot)$ na algebrze Liego $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ jest *niezmiennicza*, jeżeli dla dowolnych $x,y,z\in\mathfrak{g}$ spełniony jest warunek $([x,y],z)+(y,[x,z])=0$.

Nadal będziemy używać oznaczenia $[U,V]:=\{[u,v]\mid u\in U, v\in V\}$ dla dowolnych podzbiorów $U,V\subset\mathfrak{g}$.

Definicja C.1.7. *Ideałem* $\mathfrak{a}$ *w algebrze Liego* $\mathfrak{g}$ nazywamy podprzestrzeń liniową w $\mathfrak{g}$, dla której $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{a}$.

Definicja C.1.8. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *prostą*, jeżeli nie zawiera ideału właściwego, to znaczy różnego od $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$. Algebrę Liego nazywamy *półprostą* , jeśli nie zawiera przemiennego ideału właściwego.

Definicja C.1.9. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Oznaczmy $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_0]$ i indukcyjnie $\mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_{n-1}]$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *nilpotentną*, jeżeli $\mathfrak{g}_n = \{0\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja C.1.10. *Homomorfizmem (antyhomomorfizmem) algebr Liego* $(\mathfrak{g}_1, [\cdot,\cdot]_1)$ *i* $(\mathfrak{g}_2, [\cdot,\cdot]_2)$ nazywamy liniowe odwzorowanie $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ spełniające równość $\rho([x,y]_1) = [\rho(x), \rho(y)]_2$ $(\rho([x,y]_1) = -[\rho(x), \rho(y)]_2)$, gdzie $x, y \in \mathfrak{g}_1$. Odwracalny homomorfizm nazywany *izomorfizmem* algebr Liego.

Dla skończenie-wymiarowej przestrzeni liniowej V, oznaczmy przez $\mathfrak{gl}(V)$ zbiór wszystkich endomorfizmów V, wyposażony w dwuargumetowe działanie $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ (gdzie $\circ$ oznacza składanie odwzorowań), czyni to z $\mathfrak{gl}(V)$ algebrę Liego. Biorąc podalgebry Liego w $\mathfrak{gl}(V)$ otrzymujemy inne ważne przykłady (skończenie wymiarowych) algebr Liego. Na przykład algebry Liego $\mathfrak{sl}(V)$ oraz $\mathfrak{o}(V)$ składają się endomorfizmów zachowujących odpowiednio formę objętości oraz iloczyn skalarny na V. Są to przykłady algebr prostych.

Definicja C.1.11. *Lewym działaniem (lub reprezentacją) algebry Liego* $\mathfrak{g}$ *na przestrzeni wektorowej* V nazywamy homomorfizm $\mathfrak{g}$ w $\mathfrak{gl}(V)$.
Analogicznie *prawym działaniem (lub antyreprezentacją) algebry Liego* $\mathfrak{g}$ *na przestrzeni wektorowej* V nazywamy antyhomomorfizm $\mathfrak{g}$ w $\mathfrak{gl}(V)$.

Innym bardzo ważnym przykładem jest algebra Liego $\Gamma(TM)$ gładkich pól wektorowych na rozmaitości M z nawiasem Liego pól wektorowych jako działaniem $[\cdot,\cdot]$. Homomorfizmy $\mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$ prowadzą do działań algebry Liego $\mathfrak{g}$ na rozmaitości M (zob. podrozdział C.4).

Definicja C.1.12. *Działaniem dołączonym algebry Liego* $\mathfrak{g}$ *na sobie* nazywamy liniowe odwzorowanie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x$, gdzie $\mathrm{ad}_x(y) := [x,y]$, dla dowolnego $y \in \mathfrak{g}$.

Definicja C.1.13. *Działaniem kodołączonym algebry Liego* $\mathfrak{g}$ *na przestrzeni dualnej* $\mathfrak{g}^*$ nazywamy odwzorowanie $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$, $x \mapsto \mathrm{ad}^*_x$ które elementowi $x \in \mathfrak{g}$ przypisuje endomorfizm $\mathrm{ad}^*_x : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$, dany wzorem $(\mathrm{ad}^*_x \alpha)(y) := -\alpha(\mathrm{ad}_x(y))$, dla $y \in \mathfrak{g}$.

Definicja C.1.14. *Algebrą Liego stabilizatora elementu* $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ *względem działania kodołączonego* nazywamy podprzestrzeń $\mathfrak{g}^\alpha := \{v \in \mathfrak{g} \mid \alpha([x,v]) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$.

Biorąc pod uwagę Przykład 3.3.1 możemy podać definicję indeksu algebry Liego, równoważną tej użytej w Twierdzeniu 4.3.1.

Definicja C.1.15. *Indeksem algebry Liego* $\mathfrak{g}$ nazywamy liczbę $\mathrm{ind}\,\mathfrak{g} := \min_{\alpha \in \mathfrak{g}^*} \dim\, \mathfrak{g}^\alpha$, gdzie $\mathfrak{g}^\alpha$ jest algebrą Liego stabilizatora elementu $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ względem działania kodołączonego.

Stwierdzenie C.1.1. Indeks półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest równy wymiarowi jej podalgebry Cartana (zob. Definicja C.1.21).

Definicja C.1.16. *Sumą półprostą algebr Liego* $\mathfrak{g}_1$ *i* $\mathfrak{g}_2$ wyznaczoną przez homomorfizm $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_2)$, $a \mapsto \rho_a$ taki, że $\rho_a([b_1,b_2]) = [\rho_a(b_1),b_2] + [b_1,\rho_a(b_2)]$, nazywamy iloczyn kartezjański $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ wyposażony w nawias Liego

$$[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]_\rho = ([(a_1,a_2],[b_1,b_2] + \rho_{a_1}(b_2) - \rho_{a_2}(b_1)),$$

gdzie $a_1,a_2 \in \mathfrak{g}_1$, $b_1,b_2 \in \mathfrak{g}_2$. Sumę półprostą oznaczamy przez $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\rho \mathfrak{g}_2$.

Dla $\rho \equiv 0$ otrzymujemy definicję *sumy prostej* algebr Liego.

Definicja C.1.17. Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest *reduktywna*, jeśli jest sumą prostą podalgebry półprostej i podalgebry przemiennej.

Definicja C.1.18. Kompleksyfikacją rzeczywistej algebry $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ nazywamy algebrą Liego $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},[\cdot,\cdot]^{\mathbb{C}})$, gdzie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{x+iy \mid x,y \in \mathfrak{g}\}$ jest kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$, a $[x_1+iy_1,x_2+iy_2]^{\mathbb{C}} := [x_1,x_2] - [y_1,y_2] + i([x_1,y_2]+[y_1,x_2])$. Algebrę Liego $\mathfrak{h}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy *formą rzeczywistą* zespolonej algebry Liego $\mathfrak{g}$, jeśli $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z kompleksyfikacją $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ algebry Liego $\mathfrak{h}$.

Definicja C.1.19. *Formą Killinga algebry Liego* $\mathfrak{g}$ nazywamy symetryczną formę dwuliniową postaci:

$$B(x,y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y), \quad x,y \in \mathfrak{g}.$$

Twierdzenie C.1.1 (Kryterium Cartana półprostości algebr Liego)**.** *Algebra Liego* $\mathfrak{g}$ *jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma Killinga jest niezdegenerowana.*

Twierdzenie C.1.2. *Algebra Liego* $\mathfrak{g}$ *jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą prostą* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ *swoich podalgebr prostych (będących również ideałami).*

Definicja C.1.20. Algebre Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}$ nazywamy *zwartą*, jeśli forma Killinga algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest ujemnie określona.

Twierdzenie C.1.3. *Algebra Liego* $\mathfrak{g}$ *jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą prostą* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, *gdzie ideał* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *jest półprosty i zwarty.*

Przykładami zwartych prostych algebr Liego są algebry $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ oraz $\mathfrak{su}(n)$ rzeczywistych macierzy skośnie symetrycznych oraz zespolonych macierzy unitarnych o zerowym śladzie wymiaru $n \times n$.

Definicja C.1.21. Podalgebrę Liego $\mathfrak{h}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *podalgebrą Cartana*, jeśli jest maksymalną podalgebrą abelową (tzn. taką że $\mathfrak{h}$ jest abelowa oraz dla dowolnej abelowej podalgebry $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{h}$ mamy $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}$), oraz dla dowolnego $x \in \mathfrak{h}$ operator ad_x jest półprosty (diagonalizowalny).

Twierdzenie C.1.4. *Każda zespolona półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$ posiada podalgebrę Cartana $\mathfrak{h}$. Dla każdych dwóch podalgebr Cartana $\mathfrak{h}$ oraz $\mathfrak{h}_1$ istnieje automorfizm algebry $\mathfrak{g}$ przeprowadzający $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}_1$.*

C.2 Pierwiastki i podprzestrzenie pierwiastkowe

Niech $\mathfrak{h}$ będzie ustaloną podalgebrą Cartana w półprostej algebrze Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ oznaczmy:

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Definicja C.2.1. Element α nazywamy *pierwiastkiem* $\mathfrak{g}$ względem $\mathfrak{h}$, jeśli $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$, wówczas przestrzeń $\mathfrak{g}^\alpha$ nazywamy *przestrzenią pierwiastkową.*

Lemat C.2.1. *Dla* $0 \in \mathfrak{h}^*$ *zachodzi* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$*, oraz jeśli* $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ *to* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Oznaczmy $R \subset \mathfrak{h}^*$ zbiór niezerowych pierwiastków.

Twierdzenie C.2.1.
1. *Zachodzi rozkład na sumę prostą podprzestrzeni* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$.
2. *Wymiar przestrzeni pierwiastkowej* $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ *dla dowolnego* $\alpha \in R$.
3. *Dla pierwiastków* $\alpha, \beta \in R$ *takich, że* $\alpha + \beta \neq 0$ *przestrzenie pierwiastkowe są ortogonalne względem formy Killinga* $B(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$.
4. *Ograniczenie formy Killinga do podalgebry Cartana jest niezdegenerowane. Dla dowolnego* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ *istnieje dokładnie jeden* $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ *taki, że* $B(H, H_\alpha) = \alpha(H)$ *dla wszystkich* $H \in \mathfrak{h}$.
5. *Jeśli* $\alpha \in R$ *to również* $-\alpha \in R$ *oraz* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha$*, przy czym* $\alpha(H_\alpha) \neq 0$.

Definicja C.2.2. *Baza układu pierwiastków* R to zbiór $B \subset R$, który stanowi bazę przestrzeni liniowej $\mathfrak{h}^*$ oraz dowolny pierwiastek $\beta \in \mathbb{R}$ może być zapisany jako $\beta = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha$, przy czym współczynniki $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ są wszystkie tego samego znaku.

Definicja C.2.3. *Pierwiastek nazywamy dodatnim* jeśli wszystkie współczynniki n_α są nieujemne. Jeśli współczynniki $n_\alpha \leq 0$ to pierwiastek nazywamy *ujemnym.*

Definicja C.2.4. Pierwiastek dodatni nazywamy *prostym*, jeśli nie może być zapisany jako suma dwóch innych pierwiastków dodatnich.

Jako przykład możemy rozważyć algebrę Liego $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ bezśladowych macierzy $n \times n$ o wyrazach zespolonych z podalgebrą Cartana $\mathfrak{h}$ równą podzbiorowi diagonalnych macierzy. Dla macierzy $H \in \mathfrak{h}$ nich $e_i(H)$ oznacza i-ty element diagonalny oraz niech E_{ij} będzie standardową „jedynką macierzową” mającą 1 na ij-tym miejscu, a na pozostałych zera. Wtedy $[H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{ij}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}$. Bazą układu pierwiastków jest np. zbior $e_i - e_{i+1}$,

$1 = 1, \dots, n-1$, pierwiastki dodatnie to $e_i - e_j$, $i < j$, odpowiadający pierwiastkowi $\alpha = e_i - e_j$ wektor H_α to $E_{ii} - E_{jj}$.

Definicja C.2.5. *Podalgebrą Borela* nazywamy podalgebrę $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ w $\mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{h}$ jest ustaloną podalgebrą Cartana, a R^+ zbiorem pierwiastków dodatnich.

Analogicznie do sytuacji z podalgebrami Cartana, każde dwie podalgebry Borela są izomorficzne, a odpowiedni izomorfizm jest realizowany przez automorfizm algebry Liego $\mathfrak{g}$.

C.3 Grupy Liego

Definicja C.3.1. *Grupą Liego G* nad ciałem $\mathbb{R}$ (odpowiednio $\mathbb{C}$) nazywamy rzeczywistą (odp. zespoloną) rozmaitość różniczkową wyposażona w strukturę grupy, dla której odwzorowanie $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ jest gładkie (odp. holomorficzne).

Dla grupy Liego G i ustalonego elementu $g \in G$. Odwzorowanie $L_g \colon G \to G$, $L_g(h) = gh$ nazywamy lewym przesunięciem, analogicznie $R_g \colon G \to G$, $R_g(h) = hg$ nazywamy prawym przesunięciem. Odwzorowania L_g, R_g są dyfeomorfizmami grupy Liego G.

Definicja C.3.2. Pole wektorowe $X \in \Gamma(TG)$ nazywamy lewoniezmienniczym, jeśli dla dowolnego $g \in G$ zachodzi $(L_g)_* X = X \circ L_g$, to znaczy $(L_g)_{*,h} X(h) = X(gh)$.

Algebrą Liego grupy Liego G nazywamy algebrę Liego $\mathfrak{g}$ lewoniezmienniczych pól wektorowych na G. Zachodzi odpowiedniość pomiędzy grupami Liego i algebrami Liego.

Lewoniezmiennicze pola wektorowe są zadane przez wartość w elemencie neutralnym grupy. Używając izomorfizmu, $\mathfrak{g} \to T_e G$, $X \mapsto X_e$ możemy identyfikować przestrzeń styczną $T_e G$ z algebrą Liego $\mathfrak{g}$.

Definicja C.3.3. Grupę Liego G nazywamy *półprostą* (*reduktywną*), jeśli odpowiadająca jej algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest algebrą półprostą (reduktywną).

Twierdzenie C.3.1 (Trzecie Twierdzenie Liego)**.** *Każda skończenie wymiarowa rzeczywista algebra Liego jest algebrą Liego pewnej jednospójnej grupy Liego.*

Założenie jednospójności jest istotne, gdyż struktura algebry Liego wyznacza się małym otoczeniem jedynki w grupie Liego i jedna i ta sama algebra Liego może odpowiadać różnym grupom Liego (mającym różną strukturę topologiczną).

Definicja C.3.4. Podgrupę H w grupie Liego G nazywamy *podgrupą Liego*, jeśli jest grupą Liego względem działania na G ograniczonego do H, oraz włożenie $H \hookrightarrow$ G jest gładką immersją.

Twierdzenie C.3.2 (Kryterium Cartana dla podgrup domkniętych)**.** *Niech G będzie grupą Liego, H domkniętą podgrupą w G. Wówczas H ma jednoznacznie wyznaczoną strukturę rozmaitości gładkiej czyniącą z H podgrupę Liego w G.*

Twierdzenie C.3.3. *Dla dowolnej podalgebry Liego $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, istnieje dokładnie jedna spójna (niekoniecznie domknięta) podgrupa Liego H w G o algebrze Liego $\mathfrak{h}$.*

Definicja C.3.5. Podgrupę Liego B w G nazywamy *podgrupą Borela*, jeśli odpowiadająca jej podalgebra Liego $\mathfrak{b}$ w $\mathfrak{g}$ jest podalgebrą Borela.

Zakończymy ten podrozdział dyskusją o kompleksyfikacji rzeczywistej grupy Liego. *Kompleksyfikacją* rzeczywistej grupy Liego G z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy dowolną zespoloną grupę Liego G^c o algebrze Liego $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ zawierająca G jako rzeczywistą podgrupę Liego. Okazuje się, że w ogólności kompleksyfikacja dla G nie istnieje [GOV94, Rozdział 1, podr. 7.2].

Jednakże w przypadku gdy G jest zwarta, ma ona jednoznacznie określoną kompleksyfikację G^c [GOV94, Rozdział 4, podr. 2.5]. Ostatnia powstaje z włożenia G w grupę $GL(V)$ automorfizmów liniowych przestrzeni wektorowej V. Rozpatrując algebraiczne równania określające $G \subset GL(V)$ i stosując je do $GL(V^{\mathbb{C}})$, otrzymujemy G^c. Okazuje się, że grupa G^c nie zależy od wyjściowej reprezentacji G w V i jest określona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu zachowującego włożenie G. Alternatywne podejście podał C. Chevalley w [Che46], dlatego w literaturze do określenia kompleksyfikacji zwartej grupy Liego często używa się terminu *kompleksyfikacja Chevalleya*.

C.4 Działanie grupy i algebry Liego na rozmaitości

Definicja C.4.1. *Działaniem algebry Liego* $\mathfrak{g}$ na rozmaitości M nazywamy homomorfizm algebry Liego w algebrę Liego pól wektorowych $\rho\colon \mathfrak{g} \mapsto \Gamma(TM)$, $\xi \mapsto \rho(\xi) = X_\xi$. Pole wektorowe $\rho(\xi)$ nazywamy *fundamentalnym polem wektorowym.*

Definicja C.4.2. *Działaniem grupy Liego* G na rozmaitości M nazywamy homomorfizm $\Psi\colon G \to Diff(M) : g \mapsto g_M$ przyporządkowujący każdemu elementowi $g \in G$ dyfeomorfizm $g_M\colon M \to M$, oznaczamy $g \cdot m := g_M(m)$.

Odwzorowanie wykładnicze $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ definiujemy jako $\exp(X) = \gamma_X(1)$, gdzie γ_X jest krzywą całkową lewoniezmienniczego pola wektorowego X^l na G, $X^l(e) = X$.

Stwierdzenie C.4.1. *Działaniu grupy Liego G na rozmaitości M, odpowiada działanie algebry Liego algebra $\mathfrak{g}$ na M, wyznaczone jednoznacznie: $X_\xi(m) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \exp(-t\xi) \cdot m$.*

Twierdzenie C.4.1 (Lie–Palais)**.** *Niech M będzie rozmaitością zwartą, wtedy działaniu algebry Liego $\mathfrak{g}$ na rozmaitości M odpowiada działanie jednospójnej grupy Liego G.*

Niech będzie dane ustalone działanie grupy Liego G na rozmaitości M.

Definicja C.4.3. *Stabilizatorem* (*podgrupą izotropową*) punktu $x \in M$ nazywamy grupę Liego $G_x = \{g \in G\, ;\, g \cdot x = x\}$. *Orbitą* punktu $x \in M$ nazywamy zbiór $G \cdot x = \{g \cdot x\, ;\, g \in G\}$.

Stabilizator jest podgrupą Liego w G, o algebrze Liego $\mathfrak{g}_x := \{\xi \in \mathfrak{g}\, ;\, X_\xi(x) = 0\}$.

Definicja C.4.4. Działanie grupy Liego $\Psi\colon G \to Diff(M)$ jest *lokalnie swobodne*, jeśli dla dowolnego punktu $x \in M$ stabilizator G_x jest podgrupą dyskretną, równoważnie algebra Liego stabilizatora zanika $\mathfrak{g}_x = \{0\}$.

Definicja C.4.5. Działanie grupy Liego $\Psi\colon G \to Diff(M)$ jest *tranzytywne (przechodnie)*, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, x' \in M$ istnieje $g \in G$ taki, że $g \cdot x = x'$.

C.5 Przestrzenie jednorodne

Niech G będzie grupą Liego, $H \subset G$ będzie domkniętą podgrupą. Oznaczmy przez $G/H = \{gH, g \in G\}$ przestrzeń ilorazową składającą się z lewostronnych warstw. Z domkniętości podgrupy H wynika, że zbiór G/H jest gładką rozmaitością. Działanie G na G/H zadane przez $g \cdot aH = gaH$ jest tranzytywne.

Definicja C.5.1. Rozmaitość M nazywamy *jednorodną G-przestrzenią*, gdy działanie G na M jest tranzytywne.

Jeśli M jest przestrzenią jednorodną względem działania grupy G, to dla ustalonego $x \in M$ odwzorowanie ewaluacji $ev_x : G \to M$: $ev_x(g) = g \cdot x$, zadaje dyfeomorfizm $\beta : G/H \to M$, $\beta(aH) = a \cdot x$ gdzie $H = G_x$ jest stabilizatorem punktu $x \in M$. Stąd mając wyszczególnione działanie grupy Liego G używamy oznaczenia przestrzeni ilorazowej G/H dla przestrzeni jednorodnych.

Dana rozmaitość może być utożsamiona z przestrzeniami ilorazowymi na różne sposoby, Na przykład sfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ dopuszcza zarówno działanie tranzytywne grupy $SO(n)$ z podgrupą izotropii $SO(n-1)$, jak i działanie grupy $O(n)$ ze stabilizatorem $O(n-1)$. Ponadto $S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n)$ oraz $S^{4n-1} \cong Sp(n)/Sp(n-1)$.

Definicja C.5.2. Niech G działa na M tranzytywnie, oznaczmy przez K stabilizator punktu $o \in M$, wtedy *reprezentacją izotropową* nazywamy działanie $K \to GL(T_oM) \;: g \mapsto g_* \,|_o$. Reprezentacje dualną do reprezentacji izotropowej nazywamy *koizotropową*.

C.6 Odwzorowanie momentu

Niech (M_1, Π_1), (M_2, Π_2) będą rozmaitościami różniczkowymi z określonymi na nich strukturami Poissona.

Definicja C.6.1. *Odwzorowaniem Poissona* (lub inaczej *odwzorowaniem kanonicznym*) nazywamy $p : (M_1, \Pi_1) \to (M_2, \Pi_2)$ takie, że dla dowolnych funkcji $f, g \in \mathscr{E}(M_1)$ zachodzi $p^*\{f, g,\}^{\Pi_2} = \{p^*f, p^*g\}^{\Pi_1}$, to znaczy $p_*\Pi_{1,x} = \Pi_{2,p(x)}$ dla wszystkich $x \in M_1$.

Powiemy, że podrozmaitość L z określoną na niej strukturą Poissona jest *podrozmaitością Poissona* w (M, Π), jeśli włożenie $j : L \hookrightarrow M$ jest odwzorowaniem Poissona.

Lemat C.6.1 ([Wei83])**.** *Podrozmaitość $L \subset M$ jest podrozmaitością Poissona wtedy i tylko wtedy, gdy w dowolnym punkcie $x \in L$ zachodzi zawieranie $\Pi(T_x^*M) \subset T_xL$, równoważnie wszystkie Hamiltonowskie pola wektorowe są styczne do L.*

Lemat C.6.2 ([Wei83])**.** *Niech $p : M_1 \to M_2$, $p(M_1) = M_2$ będzie odwzorowaniem Poissona, niech $f \in C^\infty(M_2)$. Wtedy trajektoria hamiltonowskiego pola wektorowego $\Pi_2(f)$ na M_2 jest obrazem trajektorii pola $\Pi_1(f \circ p)$ na M_1.*

Niech G będzie spójną grupą Liego, o algebrze Liego $\mathfrak{g}$, działającą na rozmaitości (M, Π), mamy wtedy określony homomorfizm algebr Liego $\rho : \mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$.

Definicja C.6.2. Działanie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$ jest *hamiltonowskie*, jeśli istnieje odwzorowanie $J\colon \mathfrak{g} \to \mathscr{E}(M)\colon \xi \mapsto f_\xi$ sprawiające, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "J"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathscr{E}(M) \arrow[d, "\Pi(\cdot)"] \\ & \Gamma(TM) \end{tikzcd}$$

Definicja C.6.3. Odwzorowanie $\mu : M \to \mathfrak{g}^*\colon\ x \mapsto \mu_x$ takie, że dla dowolnego $\xi \in \mathfrak{g}$: $\rho(\xi)$ jest hamiltonowskim polem wektorowym z funkcją Hamiltona $f_\xi(x) = \mu_x(\xi)$, nazywamy *odwzorowaniem momentu.*

Tak zdefiniowane μ jest odwzorowaniem Poissona $(M, \Pi) \to (\mathfrak{g}^*, \Pi_{\mathfrak{g}^*})$, gdzie $\Pi_{\mathfrak{g}^*}$ jest kanoniczną strukturą Liego–Poissona wprowadzoną w Przykładzie 3.3.1.

Przytoczymy tak zwany Lemat o bifurkacji, używany w dowodach Twierdzeń 4.3.1, 5.4.1.

Lemat C.6.3 ([OR04], Lemat o bifurkacji)**.** *Niech działanie algebry Liego $\mathfrak{g}$ na rozmaitość Poissona (M, Π) będzie działaniem hamiltonowskim, z odwzorowaniem momentu $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$. Ustalmy punkt $x \in M$, oraz oznaczmy przez F liść symplektyczny przechodzący przez punkt x. Wówczas $T_x\mu(T_xF) = (\mathfrak{g}_x)^\circ$, gdzie $(\mathfrak{g}_x)^\circ$ oznacza anihilator w $\mathfrak{g}^*$ algebry Liego stabilizatora $\mathfrak{g}_x$. Gdy M jest rozmaitością symplektyczną to* $\operatorname{im} T_x\mu = (\mathfrak{g}_x)^\circ$.

Bibliografia

[AKN06] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2006. doi: 10.1007/978-3-540-48926-9.

[Ale97] D. V. Alekseevskii. “Flag Manifolds”. *Zbornik Radova*, 1997. (14):3–35.

[AMR88] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer New York, 1988. doi: 10.1007/978-1-4612-1029-0.

[Arn66] V. I. Arnold. “Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits”. *Annales de l’institut Fourier*, 1966. 16(1):319–361. doi: 10.5802/aif.233.

[Arn78] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer New York, 1978. doi: 10.1007/978-1-4757-1693-1.

[Aud04] M. Audin. *Spinning Tops*. Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521561299.

[Baz00] Y. V. Bazaikin. “Double quotients of Lie groups with integrable geodesic flow”. *Siberian Mathematical Journal*, June 2000. 41(3):419–432. ISSN 1573-9260. doi: https://doi.org/10.1007/BF02674099.

[BD06] T. B. Bouetou, J. P. Dufour. “Veronese curves and webs: interpolation”. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2006. 2006:1–11. doi: 10.1155/ijmms/2006/93142.

[Bes87] A. L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. ISBN 3-540-15279-2. doi: 10.1007/978-3-540-74311-8.

[BI14] A. V. Bolsinov, A. Izosimov. “Singularities of Bi-Hamiltonian Systems”. *Communications in Mathematical Physics*, apr 2014. 331(2):507–543. ISSN 0010-3616. doi: 10.1007/s00220-014-2048-3.

[BJ01] A. V. Bolsinov, B. Jovanović. “Integrable Geodesic Flows on Homogeneous spaces”, 2001.

[BJ03] A. V. Bolsinov, B. Jovanović. “Noncommutative Integrability, Moment Map and Geodesic Flows”. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 2003. 23(4):305–322. ISSN 0232-704X. doi: https://doi.org/10.1023/A:1023023300665.

[BJ04a] A. V. Bolsinov, B. Jovanović. "Complete involutive algebras of functions on cotangent bundles of homogeneous spaces". *Mathematische Zeitschrift*, jan 2004. 246(1-2):213–236. doi: 10.1007/s00209-003-0596-x.

[BJ04b] A. V. Bolsinov, B. Jovanović. "Integrable geodesic flows on Riemannian manifolds: construction and obstructions". *Contemporary geometry and related topics*, 2004. pages 57–103. doi: 10.1142/9789812703088_0004.

[BKF95] A. V. Bolsinov, V. V. Kozlov, A. T. Fomenko. "The Maupertuis principle and geodesic flows on the sphere arising from integrable cases in the dynamics of a rigid body". *Russian Mathematical Surveys*, jun 1995. 50(3):473–501. doi: 10.1070/rm1995v050n03abeh002100.

[Bol92] A. V. Bolsinov. "Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution." *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, feb 1992. 38(1):69–90. ISSN 0025-5726. doi: 10.1070/im1992v038n01abeh002187.

[Bol16] A. V. Bolsinov. "Complete commutative subalgebras in polynomial poisson algebras: A proof of the Mischenko-Fomenko conjecture". *Theoretical and Applied Mechanics*, 2016. 43(2):145–168. doi: 10.2298/tam161111012b.

[Bra87] A. V. Brailov. "Construction of completely integrable geodesic flows on compact symmetric spaces". *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, February 1987. 29(1):19–31. ISSN 0025-5726. doi: 10.1070/IM1987v029n01ABEH000957.

[Bro90] R. Brouzet. "Systémes bihamiltoniens et compléte intégrabilité en dimension 4". *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 1990. ISSN 0764-4442.

[Cla] A. C. Clairaut. *Theorie De La Figure De La Terre*. Kessinger Publishing, LLC. ISBN 9781104782795.

[CS09] A. Cap, J. Slovak. *Parabolic geometries. I*, volume 154 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. ISBN 978-0-8218-2681-2. doi: 10.1090/surv/154. Background and general theory.

[Che46] A. Chevalley. *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946. ISBN 978-0-6910-4990-8.

[DGJ09] V. Dragović, B. Gajić, B. Jovanović. "Singular Manakov flows and geodesic flows on homogeneous spaces of SO(N)". *Transformation Groups*, jul 2009. 14(3):513–530. ISSN 1083-4362. doi: 10.1007/s00031-009-9062-0.

[DK00] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk. *Lie Groups*. Springer Berlin Heidelberg, 2000. doi: 10.1007/978-3-642-56936-4.

[dSW99] A. C. da Silva, A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, volume 10 of *Berkeley Mathematics Lecture Notes*. American Mathematical Society, Providence, RI; Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, Berkeley, CA, 1999. ISBN 0-8218-0952-0.

[EM70] D. G. Ebin, J. Marsden. "Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid". *The Annals of Mathematics*, jul 1970. 92(1):102. doi: 10.2307/1970699.

[Eul65] L. Euler. "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primiis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad onmes motus qui inhuiusmodi corpora cadere possuntaccommodata". *Mèmoires de l'Acad èmie des Sciences Berlin*, 1765.

[FT95] A. T. Fomenko, V. V. Trofimov *Algebra and geometry of integrable Hamiltonian differential equations*. Faktorial, Moscow, 1995.

[Fro77] F. G. Frobenius. "Ueber das Pfaffsche Problem." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1877. 82:230–315.

[GMM13] P. M. Gadea, J. M. Masque, I. V. Mykytyuk. *Differentiable Manifolds*, 2013. doi: 10.1007/978-94-007-5952-7_1.

[GOV94] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg. "Structure of Lie Groups and Lie Algebras". In *Lie Groups and Lie Algebras III*, pages 1–223. Springer Berlin Heidelberg, 1994. doi: 10.1007/978-3-662-03066-0_1.

[GS83] V. Guillemin, S. Sternberg. "On collective complete integrability according to the method of Thimm". *Ergod. Theory and Dynam. Syst.*, 1983. 3:219–230. ISSN 0143-3857. doi: 10.1017/s0143385700001930.

[GS84] V. Guillemin, S. Sternberg. "Multiplicity-free spaces". *Journal of Differential Geometry*, 1984. 19(1):31 – 56. doi: 10.4310/jdg/1214438422.

[GS00] I. Z. Golubchik, V. V. Sokolov. "One more kind of the classical Yang-Baxter equation". *Functional Analysis and Its Applications*, 2000. 34(4):296–298. doi: 10.1023/a:1004113508705.

[GZ89] I. M. Gelfand, I. Zakharevich. "Spectral theory for a pair of skew-symmetrical operators on S^1". *Funktsion. Analiz i ego Prilozh. 23*, 1989. 2:1–11.

[GZ91] I. M. Gelfand, I. Zakharevich. “Webs, Veronese curves, and bihamiltonian systems”. *Journal of Functional Analysis*, jul 1991. 99(1):150–178. doi: 10.1016/0022-1236(91)90057-c.

[GZ93] I. M. Gelfand, I. Zakharevich. “On the Local Geometry of a Bihamiltonian Structure”. In *The Gelfand Mathematical Seminars, 1990–1992*, pages 51–112. Birkhauser Boston, 1993. doi: 10.1007/978-1-4612-0345-2_6.

[Hal13] B. C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer New York, 2013. doi: 10.1007/978-1-4614-7116-5.

[Hal15] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer-Verlag GmbH, 2015. ISBN 978-3-319-13467-3.

[Hel01] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. American Mathematical Society, jun 2001. ISBN 0-8218-2848-7. doi: https://doi.org/10.1090/gsm/034.

[IiW84] K. Ii, S. ichi Watanabe. “Complete Integrability of the Geodesic Flows on Symmetric Spaces”. In *Geometry of Geodesics and Related Topics*. Mathematical Society of Japan. ISSN 0920-1971, 1984 doi: 10.2969/aspm/00310105.

[Jac39] C. G. J. Jacobi. “Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1839. pages 309–313. doi: 10.1515/9783112389867-015.

[Jac84] C. G. J. Jacobi. *C. G. J. Jacobi’s Vorlesungen uber Dynamik gehalten an der Universitat zu Konigsberg im Wintersemester 1842-1843 und nach einem von C.W. Borchart ausgearbeiteten Hefte*. Berlin :G. Reimer,, 1884. https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/18726.

[Jov02] B. Jovanović. “On the Integrability of Geodesic Flows of Submersion Metrics”. *Letters in Mathematical Physics*, 2002. 61(1):29–39. ISSN 0377-9017. doi: https://doi.org/10.1023/A:1020234130071.

[Jov10] B. Jovanović. “Integrability of Invariant Geodesic Flows on *n*-Symmetric Spaces”. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 2010. 38(3):305–316. ISSN 0232-704X. doi: 10.1007/s10455-010-9216-2.

[JSV23] B. Jovanović, T. Sukilovic, S. Vukmirovic. “Integrable Systems Associated to the Filtrations of Lie Algebras”. *Regular and Chaotic Dynamics*, January 2023. 28(1):44–61. ISSN 1468-4845. doi: https://doi.org/10.1134/S1560354723010045.

[Kir76] A. A. Kirillov. "Local Lie Algebras". *Uspekhi Mat. Nauk*, 1976. 31:57—76. [in Russian] (transl.in Russian Math. Surveys 31 (1976), 55–75).

[Kir04] A. A. Kirillov. *Lectures on the Orbit Method*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2004. ISBN 9780821835302.

[KM03] B. Khesin, G. Misiołek. "Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits". *Advances in Mathematics*, jun 2003. 176(1):116–144. doi: 10.1016/s0001-8708(02)00063-4.

[Kra79] M. Kramer. "Spharische Untergruppen in kompakten zusammenhangenden Liegruppen". *Compositio Mathematica*, 1979. 38(2):129–153.

[KSM90] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri. "Poisson-Nijenhuis structures". *Annales de l'I.H.P. Physique theorique*, 1990. 53(1):35–81. ISSN 1678-7544. doi: 10.1007/s00574-011-0032-5.

[Lav18] S. Lavau. "A short guide through integration theorems of generalized distributions". *Differential Geometry and its Applications*, December 2018. 61:42–58. ISSN 0926-2245. doi: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2018.07.005.

[Lie80] S. Lie. "Theorie der Transformationsgruppen I". *Mathematische Annalen*, dec 1880. 16(4):441–528. doi: 10.1007/bf01446218.

[LP19] K. Lompert, A. Panasyuk. "Invariant Nijenhuis Tensors and Integrable Geodesic Flows". *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, aug 2019. doi: 10.3842/sigma.2019.056.

[Mag78] F. Magri. "A simple model of the integrable Hamiltonian equation". *Journal of Mathematical Physics*, may 1978. 19(5):1156–1162. doi: 10.1063/1.523777.

[Man76] S. V. Manakov. "Note on the integration of Eulerś equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body". *Functional Analysis and Its Applications*, 1976. 10(4):328–329. ISSN 1573-8485. doi: https://doi.org/10.1007/BF01076037.

[MCFP97] F. Magri, P. Casati, G. Falqui, M. Pedroni. *Eight lectures on integrable systems*, pages 256–296. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-540-69521-9, 1997. doi: 10.1007/BFb0113698.

[MF78a] A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko. "Euler Equations On Finite-Dimensional Lie Groups". *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978. 12(2):371.

[MF78b] A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko. “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”. *Functional Analysis and Its Applications*, 1978. 12(2):113–121. ISSN 1573-8485. doi: https://doi.org/10.1007/BF01076254.

[Mis82] A. S. Mishchenko. “Integration of geodesic flows on symmetric spaces”. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, feb 1982. 31(2):132–134. doi: https://doi.org/10.1007/BF01158134.

[MM74] L. Markus, K. R. Meyer. “Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic”. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1974. 0(144):0–0. ISSN 0065-9266. doi: 10.1090/memo/0144.

[Mos80a] J. K. Moser. “Geometry of Quadrics and Spectral Theory”. In *The Chern Symposium 1979*, pages 147–188. Springer New York, 1980. doi: 10.1007/978-1-4613-8109-9_7.

[Mos80b] J. K. Moser. *Various Aspects of Integrable Hamiltonian Systems*, pages 137–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA. ISBN 978-1-4899-3743-8, 1980. doi: 10.1007/978-1-4899-3743-8_3.

[MP04] I. V. Mykytyuk, A. Panasyuk. “Bi-Poisson structures and integrability of geodesic flow on homogeneous spaces”. *Transformation Groups*, 2004. 9(3):289–308.

[MR99] J. E. Marsden, T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer New York, 1999. doi: 10.1007/978-0-387-21792-5.

[MS00] I. V. Mykytyuk, A. Stepin. “Classification of almost spherical pairs of compact simple Lie groups”. *Banach Center Publications*, 2000. 51(1):231–241.

[Myk87] I. V. Mykytyuk. “On the integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration space”. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, feb 1987. 57(2):527–546. doi: 10.1070/sm1987v057n02abeh003084.

[Myk16] I. V. Mykytyuk. “Integrability of geodesic flows for metrics on suborbits of the adjoint orbits of compactgroups”. *Transformation Groups*, mar 2016. 21(2):531–553. doi: 10.1007/s00031-016-9373-x.

[Myk21] I. V. Mykytyuk “Reductions of Invariant bi–Poisson Structures and Locally Free Actions”. *Symmetry*, 2021. 13(11), 2043. doi: doi.org/10.3390/sym13112043.

[Nag66] T. Nagano. “Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras”. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, oct 1966. 18(4):398–404. ISSN 0025-5645. doi: 10.2969/jmsj/01840398.

[Nij51] A. Nijenhuis. “Xn-1-Forming Sets of Eigenvectors”. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 1951. 54:200–212. doi: 10.1016/s1385-7258(51)50028-8.

[Oni62] A. L. Onishchik. “Inclusion relations between transitive compact transformation groups”, 1962. 11:199–242. doi: 10.1090/trans2/050/02.

[OR04] J.-P. Ortega, T. S. Ratiu. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*. Birkhäuser Boston, 2004. doi: 10.1007/978-1-4757-3811-7.

[OS06] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov. “Integrable matrix equations related to pairs of compatible associative algebras”. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, sep 2006. 39(40):12447–12456. doi: 10.1088/0305-4470/39/40/011.

[Pan00] A. Panasyuk. “Veronese webs for bi-Hamiltonian structures of higher corank”. *Poisson Geometry (Warsaw, 1998)*, 02 2000. 51.

[Pan03] A. Panasyuk. “Projections of Jordan bi-Poisson structures that are Kronecker, diagonal actions, and the classical Gaudin systems”. *Journal of Geometry and Physics*, sep 2003. 47(4):379–397. ISSN 0393-0440. doi: 10.1016/s0393-0440(02)00228-0.

[Pan06] A. Panasyuk. “Algebraic Nijenhuis operators and Kronecker Poisson pencils”. *Differential Geometry and its Applications*, sep 2006. 24(5):482–491. doi: 10.1016/j.difgeo.2006.05.009.

[Pan07a] A. Panasyuk. “Reduction by stages and the Raïs-type formula for the index of a Lie algebra with an ideal”. *Annals of Global Analysis and Geometry*, jun 2007. 33(1):1–10. doi: 10.1007/s10455-007-9070-z.

[Pan09] A. Panasyuk. “Bi-Hamiltonian structures with symmetries, Lie pencils and integrable systems”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, mar 2009. 42(16):165205. doi: 10.1088/1751-8113/42/16/165205.

[Pan14] A. Panasyuk. “Compatible Lie brackets: towards a classification”. *J. Lie Theory*, 2014. (24):561–623.

[Pan07b] D. I. Panyushev. “Semi-Direct Products of Lie Algebras and their Invariants”. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 2007. 43(4):1199–1257. ISSN 0034-5318. doi: 10.2977/prims/1201012386.

[PY13] D. I. Panyushev, O. Yakimova. “Parabolic contractions of semisimple Lie algebras and their invariants”. *Selecta Math. (New Series)*, 2013. 19:699–717. doi: doi.org/10.1007/s00029-013-0122-x.

[Poi09] S. D. Poisson. “Sur la variation des constantes arbitraires dans lesquestions de mécanique”. *J. Ecole Polytechnique*, 1809. (8):266–344.

[PS94] G. P. Paternain, R. J. Spatzier. “New examples of manifolds with Completely Integrable geodesic flows”. *Advances in Mathematics*, oct 1994. 108(2):346–366. ISSN 0001-8708. doi: 10.1006/aima.1994.1074.

[Rai78] M. Rais. “L’indice des produits semi-directs $E \underset{\rho}{\times} \mathfrak{g}$”. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 1978. pages A195–A197.

[Sad04] S. T. Sadetov. “A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture”. *Dokl. Math*, 2004. 397:751–754.

[Thi81] A. Thimm. “Integrable geodesic flows on homogeneous spaces”. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, dec 1981. 1(4):495–517. ISSN 0143-3857. doi: 10.1017/s0143385700001401.

[Tur89] F.-J. Turiel. “Classification locale d’un couple de formes symplectiques Poisson-compatibles. (Local classification of a couple of Poisson compatible symplectic forms).” *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, 1989. 308(20):575–578. ISSN 0764-4442.

[Tur92] F.-J. Turiel. “Structures bihamiltoniennes sur le fibré cotanget”. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 1992. 315:1085–1088.

[Tur00] F.-J. Turiel. “Tissus de Veronese analytiques de codimension supérieure et structures bihamiltoniennes”. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, jul 2000. 331(1):61–64. doi: 10.1016/s0764-4442(00)00321-9.

[Vai94] I. Vaisman. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Birkhäuser Basel, 1994. doi: 10.1007/978-3-0348-8495-2.

[Wan54] H.-C. Wang. “Closed Manifolds with Homogeneous Complex Structure”. *American Journal of Mathematics*, jan 1954. 76(1):1. ISSN 0002-9327. doi: 10.2307/2372397.

[WB59] H. Whitney, F. Bruhat. “Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, dec 1959. 33(1):132–160. doi: 10.1007/BF02565913.

[Wei83] A. Weinstein. “The local structure of Poisson manifolds”. *J. Differential Geom.*, 1983. 18(3):523–557.

[Wol07] J. A. Wolf. *Harmonic Analysis on Commutative Spaces*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2007. ISBN 978-08-218-4289-8.

[Zak01] I. Zakharevich. "Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation". *Transformation Groups*, sep 2001. 6(3):267–300. doi: 10.1007/bf01263093.

[ZF72] V. E. Zakharov, L. D. Faddeev. "Korteweg-de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system". *Functional Analysis and Its Applications*, 1972. 5(4):280–287. doi: 10.1007/bf01086739.

[ZM74] V. E. Zakharov, S. V. Manakov. "On the complete integrability of the nonlinear Schrödinger equation". *Theoretical and Mathematical Physics*, jun 1974. 19(3):551–559. doi: 10.1007/bf01035568.