Białystok, 19 października 2023 r.

dr hab. Ryszard Mazurek
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka

Recenzja rozprawy doktorskiej p. mgr Grzegorza Bajora
pt. ***Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne***

Pan mgr Grzegorz Bajor przedstawił rozprawę doktorską pod tytułem *Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne.* Rozprawa liczy 88 stron, składa się z pięciu rozdziałów, a bibliografia obejmuje 80 pozycji. O pierścieniach w rozprawie nie zakłada się, że są przemienne. Przedstawione w rozprawie wyniki pochodzą z trzech artykułów napisanych wspólnie z promotorem p. dr hab. Michałem Ziembowskim, przy czym współautorem jednego z nich jest również prof. Leon van Wyk. Artykuły te zostały opublikowane w dobrych czasopismach matematycznych. Zgodnie z numeracją w bibliografii są to następujące publikacje:

[18] Grzegorz Bajor, Leon van Wyk, Michał Ziembowski, Construction of a class of maximal commutative subalgebras of prime Leavitt path algebras, Forum Math. 33 (2021), no. 6, 1573–1590

[19] Grzegorz Bajor, Michał Ziembowski, An annihilator condition on Leavitt path algebras, Publ. Math. Debrecen 95 (2019), no. 1-2, 169–185

[20] Grzegorz Bajor, Michał Ziembowski, Annihilator condition does not pass to polynomials and power series, J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), no. 9, 3869–3878

Celem rozprawy, zgodnie z jej tytułem, jest konstruowanie pierścieni o pewnych zadanych własnościach. Konstrukcje te są przedstawione w rozdziałach 3, 4 i 5 rozprawy i zostały omówione w dalszej części recenzji.

Dwa pierwsze rozdziały rozprawy mają charakter wprowadzający. Rozdział 1 zawiera omówienie treści rozprawy, definicje podstawowych pojęć i oznaczenia niektórych obiektów rozpatrywanych w rozprawie oraz sformułowanie tzw. Diamond Lemma. W rozdziale 2 przedstawiono genezę i konstrukcję algebry ścieżek Leavitta oraz kilka pojęć, własności i przykładów z nią związanych. Baza MathSciNet podaje ponad 200 publikacji z nazwą tej algebry w tytule, z których najstarsza pochodzi z 2005 r. Jest to więc konstrukcja stosunkowo młoda i intensywnie badana. Jej składnikami są ciało K i graf (skierowany) E, a otrzymana w wyniku tej konstrukcji algebra ścieżek Leavitta jest oznaczana przez $L_K(E)$. Badanie algebr ścieżek Leavitta $L_K(E)$ polega głównie na ustalaniu związków między własnościami grafu E a pierścieniowymi własnościami algebry $L_K(E)$. Na przykład, odpowiednio dobierając graf E, można jako algebrę ścieżek Leavitta $L_K(E)$ otrzymać pierścień macierzy $M_n(K)$ i pierścień wielomianów Laurenta $K[x, x^{-1}]$.

W rozdziale 3, opracowanym na podstawie publikacji [19], opisano algebry ścieżek Leavitta posiadające własność (A). Aby przywołać definicję tej własności, dla pierścienia R i jego niepustego podzbioru S, oznaczmy przez $r_R(S)$ (odp. $l_R(S)$) prawostronny (odp. lewostronny) anihilator zbioru S w pierścieniu R. Mówimy, że pierścień R ma prawostronną (odp. lewostronną) własność (A), jeśli dla każdego jego skończenie generowanego ideału I takiego, że $r_R(I) = \{0\}$ (odp. $l_R(I) = \{0\}$), również $r_R(a) = \{0\}$ (odp. $l_R(a) = \{0\}$) dla pewnego elementu $a \in I$. Istnieją przykłady pierścieni, które mają własność (A) z jednej strony, a nie mają jej z drugiej. Mówimy, że pierścień ma własność (A), jeśli jednocześnie ma prawostronną i lewostronną własność (A).

Głównymi rezultatami rozdziału 3 są twierdzenia 3.1.8 i 3.1.9 podające opis algebr ścieżek Leavitta $L_K(E)$ mających własność (A), wyrażony w języku własności grafu E. Poniżej przytoczono te twierdzenia, przeredagowując je w taki sposób, aby uniknąć przywoływania pojęć i symboli występujących w ich oryginalnym sformułowaniu.

Twierdzenie 3.1.8. *Niech K będzie ciałem i niech E będzie grafem skończonego rzędu (tzn. z każdego wierzchołka wychodzi tylko skończenie wiele krawędzi). Jeśli graf E ma skończenie wiele wierzchołków, to następujące warunki sa równoważne:*

(1) *$L_K(E)$ ma własność (A).*
(2) *$L_K(E)$ ma lewostronną własność (A).*
(3) *$L_K(E)$ ma prawostronną własność (A).*
(4) *W grafie E każdy cykl π, który ma wyjście (tzn. z któregoś wierzchołka cyklu π wychodzi krawędź nie należąca do π), ma tę własność, że dla każdego wierzchołka v grafu E, jeśli istnieje ścieżka od pewnego wierzchołka cyklu π do wierzchołka v, to istnieje również ścieżka od v do pewnego wierzchołka cyklu π.*

Twierdzenie 3.1.9. *Niech K będzie ciałem i niech E będzie grafem skończonego rzędu. Jeśli graf E ma nieskończenie wiele wierzchołków, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *$L_K(E)$ ma własność (A).*
(2) *$L_K(E)$ ma lewostronną własność (A).*
(3) *$L_K(E)$ ma prawostronną własność (A).*
(4) *Dla dowolnego skończonego zbioru F wierzchołków grafu E istnieje taki wierzchołek v_F tego grafu, że do żadnego wierzchołka grafu E nie można dojść jednocześnie pewną ścieżką wychodzącą z jakiegoś wierzchołka należącego do F i pewną ścieżką wychodzącą z v_F.*

Ponieważ algebra ścieżek Leavitta zawsze jest pierścieniem Bézouta (tzn. skończenie generowane ideały jednostronne są główne), więc przytoczone twierdzenia pozwalają łatwo konstruować pierścienie Bézouta, które nie mają ani lewostronnej, ani prawostronnej własności (A) - takim jest pierścień przedstawiony w przykładzie 3.1.3.

W rozdziale 4, opracowanym na podstawie publikacji [18], rozważane są pierwsze algebry ścieżek Leavitta $L_K(E)$ dla grafów E posiadających co najmniej dwa wierzchołki. Dla takiego grafu E rozważa się dowolne rozbicie zbioru jego wierzchołków na sumę rozłączną niepustych podzbiorów E_s^0 i E_r^0, z którym związuje się pewną podalgebrę $L_K(E_s^0, E_r^0)$ algebry $L_K(E)$. Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie 4.2.1, które mówi, że (w zależności od własności grafu E) następujące algebry są maksymalnymi przemiennymi podalgebrami pierwszej algebry ścieżek Leavitta $L_K(E)$:

- *$L_K(E_s^0, E_r^0)$, jeżeli E ma nieskończenie wiele wierzchołków;*
- *$Z(L_K(E)) + L_K(E_s^0, E_r^0)$, jeżeli E ma skończenie wiele wierzchołków, dokładnie jeden cykl i cykl ten nie ma wyjść ($Z(L_K(E))$ oznacza centrum algebry $L_K(E)$);*
- *$K \cdot 1 + L_K(E_s^0, E_r^0)$ w pozostałych przypadkach.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na szeregu rezultatów pomocniczych, udowodnionych w tym samym rozdziale. Innym ważnym wynikiem jest stwierdzenie 4.2.17, inspirowane twierdzeniem Schura o wymiarze przemiennych podalgebr algebry macierzy $M_n(K)$ i będące rozszerzeniem tego twierdzenia na pierwsze algebry ścieżek Leavitta. Rozdział kończy się nowym dowodem twierdzenia 4.13 z pracy [25], dotyczącego tzw. jądra przemiennego algebry ścieżek Leavitta nad pierścieniem przemiennym z jedynką.

Rozdział 5 został opracowany na podstawie publikacji [20] i dotyczy pierścieni spełniających (prawostronny) warunek anihilatorowy (w skrócie a.c., od angielskiego *annihilator condition*), tzn. takich pierścieni R, że dla dowolnego skończenie generowanego ideału I pierścienia R istnieje element $a \in R$, dla którego $r_R(I) = r_R(RaR)$. W rozdziale tym skonstruowano dwa pierścienie: R_1 (w podrozdziale 5.2) i R_2 (w podrozdziale 5.3) takie, że

- *pierścień R_1 spełnia warunek (a.c.), lecz ani pierścień wielomianów $R_1[x]$ ani pierścień szeregów potęgowych $R_1[[x]]$ go nie spełniają;*
- *pierścień wielomianów $R_2[x]$ i pierścień szeregów potęgowych $R_2[[x]]$ spełniają warunek (a.c.), lecz pierścień R_2 go nie spełnia.*

Oba pierścienie R_1 i R_2 skonstruowano jako algebry nad ciałem dwuelementowym, generowane przez skończoną liczbę pewnych elementów z pewnymi relacjami między nimi. Znalezienie odpowiednich generatorów i relacji, a także sprawdzenie, że skonstruowane pierścienie mają pożądane własności, wymagało dużej pomysłowości i biegłości, zwłaszcza w przypadku pierścienia R_1. Skonstruowany pierścień R_1 jest szczególnie cenny, gdyż daje negatywną odpowiedź na pytanie z pracy [46] o to, czy warunek (a.c.) przenosi się z pierścienia współczynników na pierścień wielomianów lub pierścień szeregów potęgowych.

Rozprawa dotyczy aktualnej tematyki, interesującej dla licznego grona osób zajmujących się teorią pierścieni nieprzemiennych. Wyniki przedstawione w rozprawie są rozwiązaniami kilku problemów naukowych, istotnych dla tej teorii. Wyniki te uważam za bardzo wartościowe i oceniam je wysoko. Ich uzyskanie wymagało posiadania dużej wiedzy z teorii pierścieni nieprzemiennych, umiejętności posługiwania się zaawansowanym aparatem matematycznym z zakresu tej teorii, jak i umiejętności prowadzenia pracy naukowej.

Mam jednak zastrzeżenia do redakcji rozprawy. Rozdziały 3, 4 i 5 zostały opracowane na podstawie publikacji [18], [19] i [20] (w dużej części są tłumaczeniem odpowiednich fragmentów tych publikacji na język polski), wymienionych na początku recenzji. O ile publikacje te są, moim zdaniem, bardzo dobrze zredagowane, nie można tego samego powiedzieć o przedłożonej rozprawie. Poniżej przedstawiam przykłady miejsc w tekście rozprawy, do których mam zastrzeżenia. Uważam, że redakcja rozprawy od strony formalnej i merytorycznej wymaga poprawy i Autor powinien dokonać odpowiednich korekt w jej tekście.

- W definicji 1.1.11 powinno być $b \neq 0$.
- W definicji 2.2.3, w warunku (CK2) brakuje założenia, że v_i nie jest ujściem.
- W dowodzie lematu 2.2.4 są odwołania do lematu 2.2.5, który w tekście pojawia się dopiero później.
- W dowodzie lematu 2.2.5 występuje symbol $\deg(\mu)$, wyjaśniony po definicji 1.1.14 i związany z gradacją, lecz $\mathbb{Z}$-gradacja algebry ścieżek Leavitta jest omówiona po lemacie 2.2.5 (na str. 27).
- Definicja warunku (a.c.) pojawia się w początkowej części rozdziału 3, ale ten warunek nie występuje nigdzie później w tym rozdziale. Lepszym miejscem dla tej definicji jest początek rozdziału 5, który dotyczy pierścieni spełniających warunek (a.c.).
- W lemacie 3.1.4 występują symbole $(E)_1$ i $(E)_2$, których znaczenia nie wyjaśniono.
- W sformułowaniu twierdzenia 3.1.6 jest mylnie zacytowane twierdzenie [6, Theorem 1.4], a w dowodzie twierdzenia 3.1.6 jest mylnie zacytowany wniosek [63, Corollary 3.3(i)] (rezultatów o takich numerach nie ma w cytowanych pracach).
- Macierz na stronie 46 jest nieprawidłowa; w pierwszym wierszu (po początkowych zerach) powinno być $a_{1k_1+1}\ a_{1k_1+2}\ \ldots\ a_{1n}$, podobnie w kolejnych wierszach.
- W lemacie 4.2.2, w części 1 powinno być $k\sigma^t$ (zamiast $k(\sigma^*)^t$), a w części 2 powinno być $k(\sigma^*)^t$ (zamiast $k\sigma^t$) oraz $|\beta| - |\alpha|$ (zamiast $|\alpha| - |\beta|$).
- W stwierdzeniu 4.2.4 powinno być $s(\gamma^*)$, zamiast $s(\gamma)$.
- W dowodzie twierdzenia 4.2.1(2) (na str. 63) rozważono jedynie przypadek, gdy $v, w \in E_s^0$. Brak odniesienia się do pozostałych przypadków.
- Na stronie 67 mowa jest o warunkach oznaczonych jako (V), (E1) i (E2), ale nie wyjaśniono, na czym one polegają.
- Ostatni akapit na str. 69 nie jest dowodem nie wprost.
- Dowody części 1 i 2 lematu 5.2.1 wymagają poprawy.
- W pierwszej linijce ostatniego akapitu na str. 74 powinno być „Niech elementy $\alpha, \beta \in \mathbb{J}(A)$ będą takie, że", zamiast „Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{J}(A)$. Wówczas".
- Równość (5.4) jest powtórzeniem równości (5.3), a powinna mieć postać $(f_{b_0}^{(1)} + f_{b_1}^{(1)})(z_0 + z_1x) = 0$.

- Sformułowania lematów 5.3.2 i 5.3.3 są nieprawidłowe.
- Wiele pozycji wymienionych w bibliografii nie jest cytowanych w rozprawie.
- Pozycje [4] i [8] w bibliografii odnoszą się do tej samej publikacji, ale podano w nich różnych autorów.
- Strona 18: Goodearl nie jest współautorem pracy [16]. Strona 20: autorami pracy [10] są Abrams i Pino (a nie sam Pino); ukazała się ona w 2005 r.
- W tekście rozprawy występują kalki z języka angielskiego (np. „Zauważmy, że przez (R2) zachodzi $span(P)[x] \subseteq \mathrm{ann}_r^R(h)$" na str. 81) i liczne literówki.
- Niektóre zdania są niezgrabne, np. „Z powyższych rozważań, jeśli $v \in E_s^0$, to dla każdego $w \in E^0$, $w = \alpha_i$ dla pewnego $i \in J$" (str. 60).

Podsumowując, stwierdzam, że wyniki przedstawione w rozprawie są oryginalnymi rozwiązaniami kilku trudnych i istotnych dla teorii pierścieni nieprzemiennych problemów naukowych i w tym zakresie spełniają wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Uważam jednak, że redakcja rozprawy od strony formalnej i merytorycznej wymaga poprawy, z uwzględnieniem przedstawionych powyżej uwag. Ufam, że na podstawie poprawionej wersji rozprawy p. mgr Grzegorz Bajor będzie mógł przystąpić do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ryszard Mazurek

Białystok, 12 września 2024 r.

dr hab. Ryszard Mazurek
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka

Recenzja poprawionej rozprawy doktorskiej pana mgr. Grzegorza Bajora
pt. *Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne*

Tematykę rozprawy, jej cel, wyniki i ich znaczenie omówiłem w recenzji (z dnia 19 października 2023 r.) pierwszej wersji rozprawy. W podsumowaniu tej recenzji stwierdziłem, że „wyniki przedstawione w rozprawie są oryginalnymi rozwiązaniami kilku trudnych i istotnych dla teorii pierścieni nieprzemiennych problemów naukowych i w tym zakresie spełniają wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Uważam jednak, że redakcja rozprawy od strony formalnej i merytorycznej wymaga poprawy", z uwzględnieniem uwag przedstawionych w recenzji.

Poprawiona rozprawa liczy 89 stron, czyli o jedną stronę mniej niż jej pierwotna wersja. W poprawionej wersji rozprawy zachowano poprzedni jej podział na rozdziały i podrozdziały (nieco zmieniając tytuł rozdziału 5). Również zachowano kolejność prezentowanych rezultatów, za wyjątkiem:

- zmiany kolejności lematów 2.2.4 i 2.2.5 (które przestawiono zgodnie z sugestią recenzenta) oraz przykładu 2.2.4 i definicji 2.2.7;
- zmiany kolejności przykładów 3.1.1 i 3.1.2 oraz stwierdzenia 3.1.3;
- umieszczenia dotychczasowego przykładu 3.1.2 zaraz po definicji 3.1.1 (nadając mu numer 3.1.1).

W poprawionej wersji dodano kilka nowych przykładów (3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 4.2.1) i zmodyfikowano dotychczasowy przykład 2.2.4. Ponadto istotnie zmieniono sformułowania twierdzenia 2.1.2 oraz (zgodnie z sugestią recenzenta) lematów 5.3.2 i 5.3.3, a także poprawiono kilka definicji i rezultatów (np. definicje 1.1.11 i 2.2.3, lemat 3.1.4, stwierdzenie 4.2.4). Układ poprawionej rozprawy oceniam jako prawidłowy.

Część rozumowań przedstawiono w poprawionej wersji w sposób bardziej klarowny i szczegółowy niż w wersji poprzedniej (np. dowód stwierdzenia 3.1.3, dowód twierdzenia 4.2.1, tekst na str. 73-74, dowód lematu 5.2.1). W wielu miejscach przeredagowano tekst, dokonano zmian językowych (zmieniając dotychczasowe sformułowania na zgrabniejsze), usunięto też literówki. Poprawiono bibliografię, usuwając z niej pozycje, które nie były cytowane. W mojej ocenie zmiany te istotnie poprawiły stronę redakcyjną rozprawy.

W poprawionej rozprawie zostały uwzględnione wszystkie moje uwagi, zapewne również uwagi pozostałych recenzentów. Dostrzegłem w niej kilka drobnych niedociągnięć (np. niejasna definicja 2.2.5, odwołanie na str. 49 do nieistniejącego przykładu 4.1, pozycje [16], [20] i [39] bibliografii), które nie zmieniają mojej ogólnie pozytywnej oceny strony redakcyjnej poprawionej rozprawy.

Podsumowując, stwierdzam ponownie, że wyniki przedstawione w rozprawie są oryginalnymi rozwiązaniami kilku trudnych i istotnych dla teorii pierścieni nieprzemiennych problemów naukowych i w tym zakresie spełniają wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Ponadto w wersji podlegającej obecnie ocenie, redakcja rozprawy spełnia kryteria jakimi pod tym względem powinna się charakteryzować rozprawa doktorska. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Grzegorza Bajora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ryszard Mazurek