

Warszawa, 26 maja 2024

dr hab. Irmina Herburt, prof. nzw. PW  
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych  
Politechnika Warszawska

**Recenzja rozprawy doktorskiej  
magistra Michała Musielaka**

**On Reduced Spherical Bodies**

Jednym z podstawowych funkcjonałów używanych do badania zbiorów wypukłych jest funkcjonał szerokości. W szczególności, istotną rolę w teorii ciał wypukłych odgrywa klasa ciał o stałej szerokości oraz szersza klasa zredukowanych ciał wypukłych. Badania zredukowanych ciał wypukłych w przestrzeniach euklidesowych rozpoczęte przez E. Heila w 1987 roku, były kontynuowane przez wielu autorów. Próba przeniesienia tych wyników na geometrię zbiorów wypukłych na sferze została zainicjowana przez Marka Lassaka w 2015 roku. Nie jest to trywialne zadanie ponieważ brak pojęcia równoległości na sferze wymusza wprowadzenie nowych definicji i metod. Magister Michał Musielak włączył się w ten nurt badań. Podstawą jego rozprawy doktorskiej jest pięć artykułów (trzy - z promotorem, dwa - samodzielne) poświęconych różnym aspektom zredukowanych ciał wypukłych na sferze. Z oświadczenia promotora wynika, że wkład Pana Michała Musielaka w prace wspólne jest nie mniejszy niż wkład współautora.

Przedstawiona do recenzji praca doktorska zawiera wprowadzenie do prezentowanych w pięciu artykułach zagadnień, omówienie wyników tych artykułów oraz załącznik ze wszystkimi artykułami. Wprowadzenie jest zwięzłe, ale bardzo staranne. W omówieniu wyników doktorant przejrzyście zaprezentował najciekawsze rezultaty prac.

Dwa pierwsze artykuły ('Reduced spherical convex bodies' oraz 'Spherical convex bodies of constant width') odnoszą się do związków pomiędzy klasami zredukowanych ciał wypukłych i ciał o stałej szerokości. Wiadomo, że w przestrzeniach euklidesowych zbiory zredukowane gładkie (dla wymiaru 2 wystarczy założenie ścisłej wypukłości) mają stałą szerokość. Odpowiedź na pytanie czy dla wyższych wymiarów można w tym problemie gładkość zastąpić ścisłą wypukłością nie jest znana. W przypadku ciał wypukłych na sferze

przełomową okazuje się być szerokość  $\frac{\pi}{2}$ . Dla wymiaru 2 autorzy udowodnili, że zredukowane ciała wypukłe o szerokości większej niż  $\frac{\pi}{2}$  mają stałą szerokość (i są gładkie), a zredukowane ciała wypukłe o szerokości mniejszej niż  $\frac{\pi}{2}$ , jeśli są ściśle wypukłe, to mają stałą szerokość (i odwrotnie). W przypadku dowolnego wymiaru sfery, autorom udało się pokazać, że zredukowane ciała wypukłe o szerokości większej niż  $\frac{\pi}{2}$  są gładkie, a o szerokości mniejszej niż  $\frac{\pi}{2}$  są ściśle wypukłe.

W kolejnej pracy ('Diameter of reduced spherical convex bodies') autorzy badają związki pomiędzy średnicą a grubością zredukowanych ciał wypukłych na sferze dwuwymiarowej.

Artykuł czwarty ('Covering a reduced spherical body by a disk') podaje oszacowanie na promień dysku zawierającego zredukowane ciało wypukłe na sferze dwuwymiarowej. Autorowi udało się zwięźle sprowadzić przypadek ogólny do przypadków takich jak ćwiartka sfery i trójkąt równoboczny, dla których wyliczył metodami trygonometrii sferycznej promienie kół opisanych na tych zbiorach.

W ostatnim artykule ('Covering a reduced spherical polygon by a disk') autor dowodzi, że zredukowany wielokąt na sferze można pokryć dyskiem o środku leżącym na brzegu wielokąta i o promieniu równym grubości rozpatrywanego wielokąta. Twierdzenie to jest odpowiednikiem wyniku znanego dla zredukowanych wielokątów na płaszczyźnie.

Oceniając całość wyników, stwierdzam, że doktorant głęboko wniknął w tematykę zredukowanych ciał wypukłych i wykazał się pomysłowością oraz technicznymi umiejętnościami w badaniu tych ciał na sferze (głównie na sferze dwuwymiarowej). Sądząc po technicznych trudnościach dowodów dla przypadku sfery dwuwymiarowej można przypuścić, że uogólnienie tych wyników na wyższe wymiary nie jest sprawą łatwą. W dowodach autor stosuje klasyczne metody geometrii zbiorów wypukłych - półsfery podpierające (odpowiednik płaszczyzn podpierających), punkty ekstremalne, ciało polarne itp. Autor wykorzystuje też techniki trygonometrii sferycznej i proste metody analityczne (głównie w pracy (4)). Dowody często wymagają rozpatrywania wielu przypadków i nierzadko sporej pomysłowości.

Wszystkie przedstawione do oceny pracy są starannie i przejrzysto napisane z dbałością w przedstawieniu odniesień do literatury i wyników innych autorów.

W Streszczeniu w wersji polskiej i angielskiej wkradła się drobna pomyłka - publikacje o numerach III i IV są zamienione miejscami w stosunku do układu w przedstawionej pracy.

Reasumując stwierdzam, że rozprawa doktorska 'On Reduced Spherical Bodies spełnia warunki określone w ustawie o stopniach i tytułach naukowych i wnioskuję o dopuszczenie mgr Michała Musielaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Irmiona Herbert