Lublin, 27 lipca 2022 r.

Prof. dr hab. Maria Nowak
Instytut Matematyki UMCS
20-031 Lublin
Pl. M. Curie-Skłodowskiej 1

Recenzja rozprawy doktorskiej Tomasza Łukasza Żyndy Selected Reproducing Kernels: Admissible Weights and Dependence on Parameters

Rozprawa składa się zasadniczo z trzech rozdziałów. W rozdziale pierwszy omówiono pewne aspekty ogólnej teorii przestrzeni Hilberta z jądrami reprodukującymi. Drugi rozdział jest poświęcony przestrzeni Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem, które są elementami jądra pewnego eliptycznego operatora różniczkowego. Przykładem takiej przestrzeni jest przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem i harmonicznych. W trzecim rozdziale autor przedstawia wyniki dotyczące tzw. ważonych jąder typu Szegö.

Niech dla obszaru $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz funkcji $\mu : U \to \mathbb{R}$ prawie wszędzie dodatniej na U (zwanej wagą) $L^2(U)$ i $L^2(U, \mu)$ oznaczają przestrzenie Hilberta funkcji mierzalnych na U i takich, że odpowiednio

$$\|f\|^2 = \int_U |f(w)|^2 dw < \infty, \quad \|f\|_\mu^2 = \int_U |f(w)|^2 \mu(w) dw < \infty.$$

Następnie niech D oznacza eliptyczny różniczkowy operator określony w twierdzeniu 2.2 i niech odpowiednio $L^2D(U) \subset L^2(U)$ i $L^2D(U, \mu) \subset L^2(U, \mu)$ oznaczają podprzestrzenie, których elementami są funkcje spełniające równanie $Df = 0$ w słabym lub silnym sensie.

Jednym z pierwszych wyników autora przedstawionych w pracy jest twierdzenie, które mówi, że dla $n = 2$, przy założeniu, że brzeg U jest klasy C^1 oraz dodatkowych założeniach regularności funkcji występujących w definicji operatora D, przestrzeń $L^2D(U)$ posiada jądro reprodukujące. W dowodzie wykorzystano znane własności funkcji będących rozwiązaniem takiego równania oraz fakt, że istnienie jądra reprodukującego w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ funkcji określonych na obszarze U jest równoważne ciągłości funkcjonału, który funkcji $f \in \mathcal{H}$ przyporządkowuje jej wartość w dowolnie ustalonym punkcie $z \in U$.

Ponadto podany jest przykład operatora $\tilde{D}$ nie będącego operatorem eliptycznym takiego, że przestrzeń $L^2\tilde{D}(U)$ nie posiada jądra reprodukującego.

Wagę μ nazywamy dopuszczalną dla operatora D, jeśli dla dowolnego zwartego podzbioru X obszaru U istnieje stała C_X taka, że dla każdego $z \in X$ oraz $f \in L^2D(U,\mu)$ mamy

$$|f(z)| \leq C_X \|f\|_\mu. \tag{1}$$

Autor dowodzi, że jeśli waga μ jest dopuszczalna dla D, to $L^2D(U,\mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $L^2(U,\mu)$ oraz posiada jądro reprodukujące. Niech $K_\mu(z,w), z, w \in U$ oznacza jądro reprodukujące przestrzeni $L^2D(U,\mu)$. Dalsza część rozdziału drugiego zawiera wyniki opisujące własności jądra reprodukującego $K_\mu(z,w)$ w zależności od własności funkcji wagowych μ i obszaru U. Omówiony jest, m.in. przypadek, gdy $U = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ oraz $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ gdzie $\{U_n\}$ jest odpowiednio ciągiem malejącym lub rosnącym obszarów (dla $\mu = 1$).

Trzeci rozdział rozprawy jest poświęcony ważonym jądrom typu Szegö Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem o brzegu $\partial\Omega$ klasy C^2. Dla funkcji $\mu : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ prawie wszędzie dodatniej niech $L^2(\partial\Omega,\mu)$ oznacza przestrzeń funkcji $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\|f\|_\mu^2 = \int_{\partial\Omega} |f(w)|^2 \mu(w) dS < \infty,$$

gdzie dS oznacza miarę powierzchniową (Hausdorffa) na $\partial\Omega$. Przestrzeń ta jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f|g\rangle_\mu = \int_{\partial\Omega} \overline{f(w)} g(w)\mu(w) dS.$$

Następnie niech $A(\Omega)$ oznacza przestrzeń funkcji $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ ciągłych na $\overline{\Omega}$ i analitycznych na Ω oraz niech $B(\Omega,\mu) = A(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega,\mu)$. W końcu przestrzeń $L^2H(\partial\Omega,\mu)$ jest zdefiniowana jako domknięcie przestrzeni $B(\Omega,\mu)$ w $L^2(\partial\Omega,\mu)$. Jeśli istnieje funkcja $S_\mu : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, $\overline{S_\mu(z,\cdot)} \in L^2H(\partial\Omega,\mu)$ taka, że dla $f \in L^2H(\partial\Omega,\mu)$

$$f(z) = \langle \overline{S_\mu(z,\cdot)} | f(\cdot) \rangle_\mu,$$

to mówimy, że funkcja $\overline{S_\mu(z,\cdot)}$ jest jądrem Szegö dla przestrzeni $L^2H(\partial\Omega,\mu)$. Zdefiniowane jest pojęcie miary S-dopuszczalnej za pomocą warunku (CB), który jest w pewnym sensie analogonem warunku (1). Autor dowodzi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia jądra Szegö dla przestrzeni $L^2(\partial\Omega,\mu)$ jest S-dopuszczalność miary μ. Przedstawiony jest również warunek dostateczny na to by μ była S-dopuszczalna . Ponadto podane są przykłady miar na brzegu koła jednostkowego i kuli jednostkowej w $\mathbb{C}^n$ nie będących miarami S-dopuszczalnymi. W dalszym ciągu tego rozdziału omówione zostały m.in. własności ważonych jąder Szegö oraz S-dopuszczalnych funkcji wagowych.

Prezentacja wyników w rozprawie jest jasna. Zostały przytoczone twierdzenia, z których autor korzysta w swoich dowodach, co ułatwia czytanie tej pracy. Znalazłam parę drobnych misprintów, ale na ogół z kontekstu wynika jak je łatwo poprawić. Niemniej, chciałabym zwrócić uwagę na usterkę w dowodzie twierdzenia 2.7 . W tym przypadku operator D jest laplasjanem a $U=\Omega$ jest obszarem w $\mathbb{R}^n$, a więc $L^2D(\Omega,\mu)$ jest podprzestrzenią funkcji f harmonicznych. Wiadomo, że wtedy $|f(z)|^\alpha$ jest funkcją podharmoniczną dla $\alpha\geq 1$, ale niekoniecznie dla $\alpha\in(0,1)$. Funkcja $|f(z)|^\alpha$ dla wszystkich dodatnich α jest podharmoniczną, w przypadku, gdy f jest funkcją holomorficzną w obszarze przestrzeni $\mathbb{C}^n$.

Wyniki zawarte w tej rozprawie doktorskiej stanowią kontynuację badań m.in. V.A. Malysheva, M. Skwarczyńskiego i Z. Pasternaka-Winiarskiego. Moim zdaniem są one interesujące i autor z sukcesem stosuje ogólne metody teorii przestrzeni Hilberta do teorii funkcji wielu zmiennych. Znaczna część prezentowanego w rozprawie materiału została już opublikowana.

Podsumowując, uważam, że rozprawa doktorska Pana mgr Tomasza Łukasza Żyndy spełnia wymogi Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (art.13, pkt 1) i wnioskuję o dopuszczenie Pana Żyndy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.