

# AUTOREFERAT

**Bartosz Kołodziejek**

Politechnika Warszawska  
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Imię i nazwisko.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późn. zm.).</b>	<b>4</b>
4.1	Tytuł . . . . .	4
4.2	Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe . . . . .	4
4.3	Omówienie osiągnięcia . . . . .	4
4.3.1	Wstęp . . . . .	4
4.3.2	Afiniczne równania punktu stałego . . . . .	5
4.3.3	Praca [H1] . . . . .	8
4.3.4	Praca [H2] . . . . .	12
4.3.5	Praca [H3] . . . . .	17
4.3.6	Praca [H4] . . . . .	23
4.3.7	Praca [H5] . . . . .	26
4.4	Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.</b>	<b>31</b>
5.1	Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora. . . . .	31
5.2	Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora spoza rozprawy habilitacyjnej. . . . .	33
<b>6</b>	<b>Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.</b>	<b>37</b>
7.1	Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną. . . . .	37
7.2	Doświadczenie dydaktyczne. . . . .	37
7.3	Opieka naukowa nad studentami. . . . .	37
<b>8</b>	<b>Literatura</b>	<b>38</b>

**1 Imię i nazwisko.**

Bartosz Kołodziejek

**2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.**

- stopień naukowy doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2015, tytuł rozprawy doktorskiej: *Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych*, promotor: prof. dr hab. Jacek Wesołowski.
- dyplom magistra matematyki, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2010, tytuł pracy magisterskiej: *Rozkład Wisharta na stożku Lorentza*, promotor: prof. dr hab. Jacek Wesołowski.
- dyplom magistra fizyki, Wydział Fizyki Technicznej Politechniki Warszawskiej, 2009, tytuł pracy magisterskiej: *Modelowanie przejść fazowych w stali*, promotor: prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński.

**3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.**

- od 2015 adiunkt, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska.

## 4 Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późn. zm.).

### 4.1 Tytuł

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

*Asymptotyka ogonów rozwiązań stochastycznych równań punktu stałego*

### 4.2 Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

- [H1] B. Kołodziejek, Logarithmic tails of sums of products of positive random variables bounded by one, *Ann. Appl. Probab.*, 27(2) (2017), 1171–1189.
- [H2] B. Kołodziejek, On perpetuities with light tails, *Adv. Appl. Probab.*, 50(4) (2018), 1119–1154.
- [H3] E. Damek, B. Kołodziejek, A renewal theorem and supremum of a perturbed random walk, *Electron. Commun. Probab.*, 23 (2018), 1–13.
- [H4] E. Damek, B. Kołodziejek, Stochastic recursions: Between Kesten’s and Grincevičius–Grey’s assumptions, *Stoch. Process. Their Appl.*, 130(3) (2020), 1792–1819.
- [H5] K. Burdzy, B. Kołodziejek, T. Tadić, Inverse Exponential Decay: Stochastic Fixed Point Equation and ARMA Models, *Bernoulli*, 25(4B) (2019), 3939–3977.

### 4.3 Omówienie osiągnięcia

#### 4.3.1 Wstęp

Przedstawiana rozprawa dotyczy badań własności rozwiązań tzw. stochastycznych równań punktu stałego, czyli równań postaci

$$X \stackrel{d}{=} \Psi(X), \quad X \text{ oraz } \Psi \text{ są niezależne,} \quad (1)$$

gdzie  $X$  jest rzeczywistą zmienną losową,  $\Psi$  jest losową funkcją Lipschitzowską, a  $\stackrel{d}{=}$  oznacza równość według rozkładu. Z tego typu równaniami nierozzerwalnie powiązane są tzw. iterowane funkcje losowe [22] (ang. *iterated random functions*, znane również jako *iterated function systems*), będące ważną klasą łańcuchów Markowa. Podstawowym przykładem takich równań jest *równanie afiniczne*, czyli

$$X \stackrel{d}{=} AX + B, \quad (A, B) \text{ oraz } X \text{ są niezależne,} \quad (2)$$

gdzie  $(A, B)$  jest pewnym wektorem losowym. Będziemy również rozważali *równanie maksymalne*, czyli

$$X \stackrel{d}{=} \max\{AX, B\}, \quad (A, B) \text{ oraz } X \text{ są niezależne.} \quad (3)$$

Ponieważ główna część osiągnięcia naukowego dotyczy równania afinicznego, dalej skupimy się na opisie (2), przy czym teoria stojąca za ogólnym równaniem (1), jak i szczególnymi przypadkami (2) i (3) jest bardzo podobna.

Podstawowym problemem w tej teorii jest badanie własności rozkładu  $X$  spełniającego (2) dla zadanej pary  $(A, B)$ . Równania tego typu pojawiają się w zastosowaniach w rozmaitych naukach stosowanych (patrz [12] oraz referencje w [54, 24]). W szczególności, w 2003r. R. Engle został uhonorowany nagrodą Nobla z ekonomii za wyniki dotyczące procesów ARCH-GARCH, czyli podstawowych przykładów opisywanych przez teorię równań (2). Trudność w analizie własności rozwiązań tych równań wynika między innymi z faktu, że stosunkowo niewiele jest znanych jawnych rozwiązań, tzn. jawnych opisów rozkładów trójki  $(A, B, X)$  spełniających (2).

Powiemy, że rozkład zmiennej losowej  $X$  jest rozwiązaniem (2), jeśli zmienne losowe  $A$ ,  $B$  oraz  $X$  mogą zostać skonstruowane na jednej przestrzeni probabilistycznej tak, by  $X$  oraz wektor  $(A, B)$  były niezależne oraz zmienne losowe  $X$  i  $AX + B$  miały takie same rozkłady. Będziemy czasem nadużywać terminologii i mówić, że to zmienna losowa  $X$ , a nie jej rozkład, jest rozwiązaniem (2).

Warunki konieczne i dostateczne na skończoność momentów oraz funkcji generujących momenty zmiennej losowej  $X$  są w pełni opisane [2, 14]. Podobnie, wiele wiadomo o możliwych typach rozkładów  $X$  (jeśli  $\mathbb{P}(A = 0) = 0$ , to są czysto dyskretne, absolutnie ciągle albo singularne, [2]) oraz ich nośnikach, [12, §2.5]. Dla iterowanych funkcji losowych znane są centralne twierdzenia graniczne, wielkie odchylenia oraz zachowanie ekstremów. Powyższe wyniki oraz wiele innych (w szczególności uogólnienie (2) do sytuacji, gdy  $X$  i  $B$  są wektorami, a  $A$  jest macierzą kwadratową) zebrane zostały w monografiach [12] oraz [37].

Kolejnym problemem rozważanym w teorii, a rozwijanym przez habilitanta, jest badanie ogona dystrybuanty (dalej będziemy mówili po prostu o ogonie) rozwiązania  $X$ , czyli funkcji  $x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$ . W ogólnym przypadku nie jest możliwe znalezienie efektywnego opisu tej funkcji. Z punktu widzenia zastosowań, informacja o asymptotyce ogona przy końcu nośnika  $X$  (zwykle  $+\infty$ ) często jest wystarczająca. Szukamy zatem jawnej funkcji  $f$ , zależnej tylko od rozkładu  $(A, B)$ , dla której mamy  $\mathbb{P}(X > x) \sim f(x)$ , gdzie dla dowolnych funkcji rzeczywistych  $f, g$  piszemy  $f(x) \sim g(x)$ , jeśli  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$ . Wielość mechanizmów, w jakich rozkład  $(A, B)$  wpływa na asymptotykę ogona  $X$  jest zaskakująco duża. W szczególności, analiza (2) przy założeniach prowadzących do lekkoogonowego rozkładu  $X$  ([28, 36, 35], [H1, H2]) jest fundamentalnie różna od przypadku ciężkoogonowego ([41, 43, 44, 27, 32], [H3, H4]). Dlatego dowody tych twierdzeń oparte są na zasadniczo innych metodach. Dodatkowo struktura zależności wektora  $(A, B)$  odgrywa znacznie większą rolę w przypadku lekkoogonowym. Ponadto, w przypadku lekkoogonowym zwykle szuka się asymptotyki logarytmu ogona, czyli jawnej funkcji  $f$ , dla której  $\log \mathbb{P}(X > x) \sim f(x)$ .

Zanim przejdziemy do opisu prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego, wprowadzimy podstawy teorii dotyczącej równania afinicznego.

### 4.3.2 Afiniczne równania punktu stałego

Przez  $(A_n, B_n)$  będziemy oznaczać wektory losowe o takim samym rozkładzie jak  $(A, B)$ , przy czym rozkład wektora  $(A, B)$  będzie się zmieniać w zależności od kontekstu.

Niech  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$  będzie ciągiem niezależnych kopii wektora  $(A, B)$ , a ciąg  $(\Psi_n)_{n \geq 1}$  losowych przekształceń afinicznych  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniujemy poprzez

$$\Psi_n(t) = A_n t + B_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Oczywiście,  $(\Psi_n)_{n \geq 1}$  jest ciągiem i.i.d. Niech  $X_0$  będzie zmienną losową niezależną od ciągu  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ . Zdefiniujmy

$$X_n := \Psi_n(X_{n-1}) = A_n X_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Jest to tzw. rekursja w przód. Wtedy  $(X_n)_{n \geq 1}$  jest łańcuchem Markowa oraz poprzez iterację (4) można pokazać, że dla  $n \geq 0$  zachodzi

$$X_n = \left( \sum_{k=1}^n B_k \prod_{j=k+1}^n A_j \right) + X_0 \prod_{i=1}^n A_i$$

przy konwencji  $\prod_{i=k}^m A_i = 1$  gdy  $m < k$ . Zdefiniujmy kolejny ciąg przekształceń afinicznych, startujący z  $S_0 = \text{id}$ , zadany przez rekursję w tył,

$$S_n(t) = S_{n-1} \circ \Psi_n(t) = S_{n-1}(A_n t + B_n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Poprzez iterację powyższego równania otrzymujemy

$$S_n(t) = \left( \sum_{k=1}^n B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \right) + t \prod_{i=1}^n A_i. \quad (6)$$

Po odpowiednim przenumerowaniu elementów ciągu  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$  łatwo zauważyć, że

$$X_n \stackrel{d}{=} S_n(X_0), \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Jak widać, rozkłady ciągów  $(X_n)_{n \geq 0}$  oraz  $(S_n(X_0))_{n \geq 0}$  są ze sobą silnie powiązane, jednak ich trajektorie są fundamentalnie różne. Ciąg  $(X_n)_{n \geq 0}$  jest ergodyczny oraz odwiedza wszystkie zbiory dodatniej miary  $\mathbb{P}_X$  nieskończenie wiele razy, podczas gdy ciąg  $(S_n(X_0))_{n \geq 0}$  zbiega p.n. (prawie na pewno). Do takich ciągów ma zastosowanie prosta, lecz bardzo użyteczna zasada opisana w [46]. Zasada ta jest znacznie ogólniejsza, ale tutaj prezentujemy ją w sformułowaniu przystosowanym do naszego problemu. *Jeśli dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  ciąg zmiennych losowych  $(S_n(t))_{n \geq 0}$  zbiega p.n. do granicy  $S$ , która to granica nie zależy od  $t$ , to rozkład  $S$  jest jedynym rozwiązaniem (2). Ponadto, ciąg  $(X_n)_{n \geq 0}$  zbiega według rozkładu do  $S$  dla dowolnego  $X_0$  (niezależnego od  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ ).*

Z postaci (6) wynika, że jedynym kandydatem na granicę ciągu  $(S_n(t))_{n \geq 0}$ , która nie zależy od  $t$ , jest szereg

$$S := \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j.$$

Żeby zrozumieć warunki przy jakich powyższy szereg jest zbieżny p.n., rozważmy najpierw przypadek  $\mathbb{P}(A = 0) > 0$ . Wtedy zmienna losowa  $N = \inf\{n \geq 1 : A_n = 0\}$  jest momentem stopu względem filtracji naturalnej ciągu  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ . Ponadto,  $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$  oraz dla  $n \geq N$  zachodzi

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^N B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j = S.$$

Wynika stąd, że warunek  $\mathbb{P}(A = 0) > 0$  zapewnia zbieżność p.n. ciągu  $(S_n(t))_{n \geq 1}$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  oraz, że granica nie zależy od  $t$ . Naturalnie nie jest to warunek konieczny. Warunki konieczne i dostateczne dla zbieżności prawie na pewno szeregu  $S$  zostały podane w [29], jednak dokładna ich postać nie jest istotna z perspektywy niniejszego opisu. Istotne jest natomiast, że warunkiem dostatecznym tej zbieżności jest

$$\mathbb{E}[\log(|A|)] \in [-\infty, 0) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[\max\{\log(|B|), 0\}] < +\infty. \quad (8)$$

W szczególności, jeśli  $\mathbb{E}[\log(|A|)] < 0$ , to z mocnego prawa wielkich liczb mamy  $A_1 \cdots A_n \rightarrow 0$  p.n.

Jeśli istnieje stała  $c \in \mathbb{R}$  taka, że  $Ac + B = c$  p.n., to  $X = c$  jest jedynym rozwiązaniem (2). Rozwiązania stałe są jednak nieinteresujące i zwykle wykluczane przez założenie warunku

$$\mathbb{P}(Ac + B = c) < 1 \quad \text{dla każdego } c \in \mathbb{R} \quad (9)$$

lub innego, który go implikuje.

Podsumowując, przy założeniu (8), proponujemy trzy sposoby na studiowanie obiektu naszych badań: następujące warunki są równoważne

- $X$  jest rozwiązaniem (2) lub równoważnych równań całkowych  
typu  $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(AX + B)]$  dla odpowiedniej klasy funkcji  $f$ , (10)

- $X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j$ , (11)

- $X$  jest granicą według rozkładu ciągu  $(X_n)_{n \geq 1}$  zdefiniowanego w (4)  
lub równoważnie rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa  $(X_n)_{n \geq 1}$ . (12)

Każdy z powyższych opisów zmiennej losowej  $X$  dostarcza innych technik do badania jej własności, co było intensywnie wykorzystywane w pracach habilitanta. Z uwagi na interpretację ubezpieczeniową sumy (11), zmienna losowa  $X$  nazywana jest czasem *perpetuitę*.

Główne rozróżnienie mechanizmów odpowiedzialnych za asymptotykę ogona zmiennej losowej  $X$  wynika z warunków

- $\mathbb{P}(|A| > 1) > 0$ , (13)

- $\mathbb{P}(|A| \leq 1) = 1$ . (14)

Wiadomo, że jeśli (13) oraz (9) są spełnione, to  $X$  ma ciężkie ogony dla dowolnego  $B$ , [28, Theorem 4.1]. Co za tym idzie, jeśli rozkład  $X$  jest niezdegenerowany oraz ma wszystkie momenty skończone, to zachodzi (14).

Ważną klasą rozwiązań równania afinicznego są wykładnicze funkcjonały procesów Lévy'ego [6]: niech  $\eta$  będzie procesem Lévy'ego z dodatnim dryfem oraz niech  $T$  będzie skończonym momentem stopu względem filtracji naturalnej  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  procesu  $\eta$ . Wtedy mamy

$$\int_0^\infty e^{-\eta_s} ds = e^{-\eta_T} \int_0^\infty e^{-\eta'_s} ds + \int_0^T e^{-\eta_s} ds$$

gdzie  $\eta'_t := \eta_{T+t} - \eta_T$ ,  $t \geq 0$ . Z mocnej własności Markowa dla procesów Lévy'ego, proces  $\eta'$  jest niezależny od  $\mathcal{F}_T$  oraz ma taki sam rozkład jak  $\eta$ . Tym samym, dla  $X \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-\eta_s} ds$  tożsamość (2) zachodzi z  $(A, B) = (e^{-\eta_T}, \int_0^T e^{-\eta_t} dt)$ . Należy jednak podkreślić, że nie każde rozwiązanie równania afinicznego jest wykładniczym procesem Lévy'ego.

### 4.3.3 Praca [H1]

Habibitant w swoich pracach [H1, H2] kontynuował badania prowadzone przez Goldiego i Grübela [28] oraz Hitczenkę i Wesołowskiego [36] oraz samego Hitczenkę [35]. Będziemy rozważali równanie (2) w sytuacji (14), kiedy  $B$  ma rozkład nadwykładniczy (w szczególności o ograniczonym nośniku).

Na potrzeby sformułowania wyników niezbędne jest przytoczenie podstawowych pojęć z zakresu analizy wypukłej [50] oraz teorii funkcji regularnie zmieniających się [7].

Dla funkcji  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiujemy jej *wypukłe sprzężenie* (albo transformatę Legendre’a-Fenchela) poprzez  $f^*(x) = \sup_{z>0} \{zx - f(z)\}$  dla  $x > 0$ . Wiadomo, że funkcja  $f^*$  jest wypukła, niemalejąca oraz półciągła z dołu. Ponadto, jeśli  $f$  jest wypukła i półciągła z dołu, to zachodzi  $(f^*)^* = f$ . Wynik ten jest znany jako Twierdzenie Fenchela-Moreau.

Dodatnią funkcję mierzalną  $L$ , zdefiniowaną w otoczeniu  $+\infty$ , nazywamy *wolnozmienną się*, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \quad \text{dla każdego } \lambda > 0. \quad (15)$$

Dodatnia funkcja mierzalna  $f$ , zdefiniowana w otoczeniu  $+\infty$ , jest *regularnie zmieniająca się z indeksem*  $\rho \in \mathbb{R}$ , jeśli  $f(x) = x^\rho L(x)$  dla pewnej funkcji wolnozmienną się  $L$ . Zbiór funkcji regularnie zmieniających się z indeksem  $\rho$  oznaczamy przez  $\mathcal{R}_\rho$ . Klasa funkcji  $\Gamma$  składa się z niemalejących, prawostronnie ciągłych funkcji, dla których istnieje mierzalna funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , taka że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + ug(x))}{f(x)} = e^u, \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R}.$$

Funkcje ze zbioru  $\Gamma$  są tzw. *szybko zmieniające się* (ang. *rapidly varying*, oznaczane przez  $\mathcal{R}_\infty$ ) w tym znaczeniu, że  $f(\lambda x)/f(x) \rightarrow +\infty$  gdy  $x \rightarrow +\infty$  dla wszystkich  $\lambda > 1$ . Klasa ta w sposób naturalny pojawia się w teorii wartości ekstremalnych przy badaniu rozkładów max-stabilnych w obszarze przyciągania rozkładu Gumbela [26].

W [35] udowodniono, że jeśli  $A \in [0, 1]$  p.n. oraz  $B = b > 0$  p.n., to dla dostatecznie dużych  $x$  zachodzi

$$\frac{2 \log(2)}{b} x \log \mathbb{P} \left( A > 1 - \frac{b}{2x} \right) \leq \log \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{4b} x \log \mathbb{P} \left( A > 1 - \frac{2b}{x} \right).$$

Definiując

$$f(x) = -x \log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x), \quad x \geq 1, \quad (16)$$

powyższy ciąg nierówności można równoważnie zapisać następująco:

$$-\log(2) f \left( \frac{2x}{b} \right) \leq \log \mathbb{P}(X > x) \leq -2^{-1} f \left( \frac{x}{2b} \right).$$

Zauważmy, że z tej nierówności nie można wywnioskować dokładnej asymptotyki logarytmu ogona  $X$  (niezależnie od rozkładu  $A$ ). Jeśli  $f \in \mathcal{R}_r$  dla  $r \in [1, +\infty)$ , to powyższa nierówność implikuje, że

$$-2^r \log(2) \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} \leq -\frac{1}{2^{r+1}}.$$



Z kolei, jeśli  $f \in \mathcal{R}_\infty$ , to lewa strona wynosi  $-\infty$ , a prawa 0. We wcześniejszej pracy [36] autorzy rozważali inną metodę dowodu górnego ograniczenia. Dzięki jej zastosowaniu byli (a raczej byliby, bo rozważali tylko szczególne przykłady, których zachowanie nie różni się istotnie od ogólnego przypadku) w stanie znaleźć dokładną asymptotykę funkcji  $x \mapsto \log \mathbb{P}(X > x)$ , gdy  $r = 1$ . Gdy  $r \in (1, +\infty)$  w przykładach, które rozważali, dolne i górne ograniczenia były skończone, lecz różne. Gdy  $r = +\infty$  ich wyniki były jeszcze słabsze: w zależności od wyboru funkcji porównującej, lewe ograniczenie było równe  $-\infty$  lub prawe ograniczenie wynosiło 0.

Głównym osiągnięciem naukowym w pracy [H1] jest znalezienie dokładnej asymptotyki logarytmu ogona  $X$  w sytuacji zdegenerowanego rozkładu  $B$ , gdy  $f$  jest funkcją regularnie zmieniającą się, lub gdy  $f$  należy do klasy  $\Gamma$ . Zauważmy, że w tej szczególnej sytuacji  $A$  i  $B$  są niezależne. W pracy [H2] habilitant rozważał ogólną sytuację, czyli niezdegenerowanego rozkładu  $B$  oraz zależnych  $A$  i  $B$ .

Przy słabych założeniach, asymptotykę logarytmu ogona  $X$  można opisać w terminach logarytmu ogona zmiennej losowej  $1/(1 - A)$ , zob. (16). Głównym wynikiem pracy [H1] jest poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 1** (Theorem 4.1 w [H1]).

*Założmy, że  $\mathbb{P}(A \in [0, 1)) = 1$  oraz  $\mathbb{P}(B = b) = 1$  dla pewnego  $b > 0$ . Niech  $X$  będzie rozwiązaniem (2) oraz niech  $f$  będzie funkcją zdefiniowaną w (16).*

(i) *Jeśli  $f \in \mathcal{R}_r$  dla  $r \in (1, +\infty)$ , to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} = \left( \frac{r}{r-1} \right)^{r-1}.$$

(ii) *Jeśli  $f \in \Gamma \subset \mathcal{R}_\infty$ , to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{r}{r-1} \right)^{r-1} = e.$$

(iii) *Jeśli  $f \in \mathcal{R}_1$  oraz  $f$  jest wypukła w otoczeniu  $+\infty$ , to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} = \lim_{r \rightarrow 1^+} \left( \frac{r}{r-1} \right)^{r-1} = 1.$$

Można pokazać, że założenie o wypukłości w punkcie (iii) powyższego twierdzenia można usunąć [55]. Jeśli  $\mathbb{P}(A \leq a) = 1$  dla pewnego  $a < 1$ , to z (11) mamy

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} b < +\infty,$$

więc w tej sytuacji nie ma sensu mówić o asymptotyce ogona  $X$  w  $+\infty$ . Jeśli  $\mathbb{P}(A \in [0, 1]) = 1$  oraz  $\mathbb{P}(A = 1) \in (0, 1)$ , to teza punktu (iii) powyżej pozostaje prawdziwa (wtedy  $f(x/b) \sim -(x/b) \log \mathbb{P}(A = 1)$ ) [H1, Corollary 5.1]. Tym samym, otrzymujemy kompletny opis asymptotyki, gdy logarytmiczny ogon  $1/(1 - A)$  jest funkcją regularnie zmieniającą się,  $A \geq 0$  p.n. oraz  $B = b > 0$  p.n.

Jeśli założenie  $\mathbb{P}(A \in [0, 1)) = 1$  zastąpimy przez  $\mathbb{P}(A \in (-1, 1)) = 1$  oraz przyjmiemy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x)}{\log \mathbb{P}(|A| > 1 - 1/x)} = 1,$$

to tezy Twierdzenia 1 pozostają prawdziwe [H1, §7].

Przy założeniu  $\mathbb{P}(A \in [0, 1]) = 1$ , asymptotyka ogona (a nie jej logarytmu) zmiennej losowej  $X$  jest znana w kilku bardzo szczególnych przypadkach. W szczególności, jeśli  $A^\alpha$  ma rozkład jednostajny na  $[0, 1]$  dla pewnej stałej  $\alpha > 0$  oraz  $B = 1$  p.n. [53]. Wtedy mamy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > x)/\rho(x-1)$ , gdzie  $\rho$  jest funkcją Dickmana–de Bruijna [21]. Inny przykład pochodzi z [14], gdzie rozważano założenia, przy których  $X$  ma taki ogon jak rozkład gamma, jednak w tych rozważaniach to rozkład  $B$  dominował nad  $A$ , co jest fundamentalnie innym mechanizmem niż opisywany tutaj.

Dowód Twierdzenia 1 opiera się na odrębnej analizie ograniczeń górnego na granicę górną oraz dolnego na granicę dolną wyrażenia  $\log \mathbb{P}(X > x)/f(x/b)$  gdy  $x \rightarrow +\infty$ . Metody dowodowe obu ograniczeń, pierwotnie zaczerpnięte z prac [28, 36], zostały dalej rozwinięte w pracy [H2] dla sytuacji, gdy  $A$  i  $B$  są zależne. Będziemy je tutaj prezentowali w tej ogólniejszej formie. Metody te były zastosowane również w analizie ogonów tzw. transformatał gładzących [1].

### Górne ograniczenie

Dowód górnego oszacowania opiera się na idei nadrozwiązań, która pozwala zweryfikować czy dana funkcja  $\phi$  majoryzuje funkcję generującą momenty zmiennej losowej  $X$ . Sformułowanie poniższego lematu pochodzi z [H2, Lemma 6.2] i jest ogólniejsze, niż to jest wymagane dla dowodu Twierdzenia 1. Wynik ten, w sytuacji  $\mathbb{P}(B = 1) = 1$ , został wyekstrahowany z dowodu [28, Theorem 3.1] przez Hitczenkę i Wesołowskiego w [36]. Wyjaśnienie pewnych nieścisłości z [36] znajduje się w [H1, 1179-1180].

**Lemat 1** (Lemma 6.2 w [H2]).

Niech  $\phi$  będzie funkcją rzeczywistą, taką że

$$\mathbb{E} \left[ e^{zB + \phi(zA) - \phi(z)} \right] \leq 1 \quad (17)$$

dla dużych wartości  $z$ .

Jeśli  $X$  jest rozwiązaniem (2), to istnieje stała  $c > 0$ , taka że

$$\mathbb{E} \left[ e^{zX} \right] \leq e^{\phi(z) + c} \quad (18)$$

dla dużych  $z$ .

Mając (18), górne ograniczenie na ogon  $X$  otrzymujemy poprzez zastosowanie wykładniczej nierówności Markowa: dla dostatecznie dużych  $z$  (powiedzmy, że dla  $z > z_0$ ) i dla dowolnego  $x > 0$  mamy

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{\mathbb{E} \left[ e^{zX} \right]}{e^{zx}} \leq e^{\phi(z) - zx + c}.$$

Stąd,

$$\log \mathbb{P}(X > x) \leq c - \sup_{z > z_0} \{zx - \phi(z)\} = c - \phi^*(x),$$

przy czym ostatnia równość zachodzi dla dużych  $x$ , jeśli  $\phi$  jest funkcją wypukłą.

Zatem, żeby pokazać, że dla pewnej funkcji wypukłej  $g$  zachodzi

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{g(x)} \leq -1, \quad (19)$$

wystarczy udowodnić, że dla  $g_C^*(x) := Cg^*(x/C)$  oraz dowolnego  $C \in (0, 1)$  zachodzi

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ e^{zB + g_C^*(zA) - g_C^*(z)} \right] < 1.$$

Rzeczywiście, zauważmy najpierw, że z definicji  $g_C^*$  oraz z wypukłości  $g$  mamy  $(g_C^*)^*(x) = Cg(x)$ . Zatem, z Lematu 1, dla dowolnego  $C \in (0, 1)$  istnieje stała  $c > 0$ , taka że dla dużych  $x$  zachodzi

$$\frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{g(x)} \leq \frac{c - (g_C^*)^*(x)}{g(x)} = -C + \frac{c}{g(x)}.$$

Przykładając  $\limsup_{x \rightarrow +\infty}$  do obu stron oraz korzystając z dowolności  $C \in (0, 1)$  otrzymujemy (19).

*Dolne ograniczenie*

Ponownie zaprezentujemy tutaj nieco ogólniejsze podejście niż tego wymaga dowód Twierdzenia 1. Podejście to dopuszcza niezdegenerowany rozkład  $B$  oraz było wykorzystane również w dowodzie [H2, Theorem 5.1].

Rozważmy dwa ciągi liczbowe  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  oraz  $(b_n)_{n \geq 1}$ , przy czym zakładamy, że  $\delta_n \in (0, 1)$  oraz  $b_n > 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Dla  $x_0 = 0$  zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg  $(x_n)_{n \geq 1}$  poprzez

$$x_n = (1 - \delta_n)x_{n-1} + b_n, \quad n \geq 1.$$

Wtedy, korzystając z (4) dla  $X_0 = 0$ , mamy  $\mathbb{P}(X_1 > x_1) = \mathbb{P}(B_1 > b_1) \geq \mathbb{P}(A_1 > 1 - \delta_1, B > b_1)$  oraz dla  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n > x_n) &\geq \mathbb{P}(A_n X_{n-1} + B_n > (1 - \delta_n)x_{n-1} + b_n, A_n > 1 - \delta_n, B_n > b_n) \\ &\geq \mathbb{P}(X_{n-1} > x_{n-1}, A_n > 1 - \delta_n, B_n > b_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n-1} > x_{n-1})\mathbb{P}(A > 1 - \delta_n, B > b_n). \end{aligned}$$

W ostatniej równości korzystamy z faktu, że ciąg  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$  jest ciągiem i.i.d. oraz  $X_{n-1}$  jest  $\sigma\{(A_k, B_k) : k \leq n-1\}$ -mierzalny. Zatem, dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\mathbb{P}(X_n > x_n) \geq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k).$$

Korzystając z (11) oraz z (7), dla nieujemnych  $A_n$  i  $B_n$  otrzymujemy

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \geq \sum_{k=1}^n B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \stackrel{d}{=} X_n,$$

więc  $\mathbb{P}(X > t) \geq \mathbb{P}(X_n > t)$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Zatem

$$\log \mathbb{P}(X > x_n) \geq \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k). \quad (20)$$

W [H1] rozważano założenie  $\mathbb{P}(B = b) = 1$  dla pewnego  $b > 0$ . Nieznacznie modyfikując powyższe rachunki dla  $b_k = b$ ,  $k = 1, \dots, n$ , można pokazać, że

$$\log \mathbb{P}(X > x_n) \geq \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k) = - \sum_{k=1}^n \delta_k f(1/\delta_k),$$

gdzie funkcja  $f$  jest zdefiniowana w (16). Dalsza część dowodu dolnego ograniczenia opiera się na doborze odpowiedniego ciągu  $(\delta_n)_{n \geq 1}$ . W szczególności, biorąc  $\delta_k = \delta \in (0, 1)$  dla  $k = 1, \dots, n$ , otrzymujemy nierówność Goldiego-Grübela ([28, (5.7)], [36, Proposition 1])

$$\mathbb{P} \left( X > b \sum_{k=1}^n (1 - \delta)^{k-1} \right) \geq \mathbb{P}(A > 1 - \delta)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nierówność ta pozwala znaleźć asymptotycznie optymalne dolne ograniczenie na logarytm ogona  $X$  w sytuacji, gdy funkcja  $x \mapsto -\log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x)$  jest wolnozmienną się (czyli  $f \in \mathcal{R}_1$ ), ale nie ogólnie [36].

#### 4.3.4 Praca [H2]

W pracy [H2] rozważano równanie (2) przy ogólniejszych założeniach niż w pracy [H1]. Dopuszczono tam, by rozkład  $B$  nie był zdegenerowany do punktu. Jak się okaże, asymptotyka ogona  $X$  zależy nie tylko od brzegowych rozkładów  $A$  i  $B$ , ale również od struktury zależnościowej wektora  $(A, B)$ . Zaczynamy od opisu prostszej sytuacji (gdy  $A$  i  $B$  są niezależne), dla której habilitant wypracował nową metodę atakowania problemu. Dowód jest znacznie krótszy niż dowód głównego twierdzenia w [H1], które również dotyczyło niezależnych  $A$  i  $B$  ( $B$  miało zdegenerowany rozkład).

*Niezależne  $A$  i  $B$*

Zauważmy, że (10) implikuje  $\mathbb{E}[\exp(zX)] = \mathbb{E}[\exp(zAX)]\mathbb{E}[\exp(zB)]$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Korzystając z niezależności  $A$ ,  $B$  oraz  $X$ , a także z warunkowania po  $A$ , otrzymujemy dla  $\phi_X(z) = \mathbb{E}[\exp(zX)]$ ,

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{zAX} \mid A]]\mathbb{E}[e^{zB}] = \mathbb{E}[\phi_X(zA)]\mathbb{E}[e^{zB}]. \quad (21)$$

Funkcja  $\phi_X$  jest charakteryzowana przez powyższe równanie całkowe oraz warunek  $\phi_X(0) = 1$ . Jak zostanie uzasadnione, znajomość asymptotyki funkcji  $\log \phi_X$  jest równoważna znajomości asymptotyki logarytmu ogona  $X$ , o ile jedna z tych funkcji jest regularnie zmieniająca się z indeksem  $\gamma > 1$ . Poniższy wynik uogólnia punkt (i) Twierdzenia 1 na sytuację niezdegenerowanego  $B$ .

#### Twierdzenie 2.

*Załóżmy, że  $A$  i  $B$  są niezależne oraz nieujemne p.n. Zdefiniujmy dwie funkcje*

$$f(x) = -x \log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x) \quad \text{oraz} \quad k(x) = -\log \mathbb{P}(B > x), \quad x \geq 1. \quad (22)$$

*Niech ponadto  $b_+ := \text{ess sup } B$  oraz  $X$  będzie rozwiązaniem (2).*

(i) [H2, Theorem 3.1] *Jeśli  $b_+ < +\infty$  oraz  $f \in \mathcal{R}_r$  dla  $r \in (1, +\infty)$ , to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b_+)} = \left( \frac{r}{r-1} \right)^{r-1}. \quad (23)$$

(ii) [H2, Theorem 3.2] *Jeśli  $b_+ = +\infty$ ,  $f \in \mathcal{R}_r$  oraz  $k \in \mathcal{R}_\alpha$  dla  $r, \alpha \in (1, +\infty)$ , to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{(f^* \circ k^*)^*(x)} = \left( \frac{\alpha r}{(\alpha-1)(r-1)} \right)^{\frac{(\alpha-1)(r-1)}{\alpha+r-1}}, \quad (24)$$

gdzie

$$(f^* \circ k^*)^* \in \mathcal{R}_{\frac{\alpha r}{\alpha+r-1}}.$$

(iii) [H2, Theorem 4.1] Punkty (i) i (ii) pozostają prawdziwe, jeśli lewe strony równań (23) i (24) zastąpimy przez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{h(x)},$$

gdzie

$$h(x) := \inf_{t \geq 1} \left\{ -t \log \mathbb{P} \left( \frac{1}{1-A} > t, B > \frac{x}{t} \right) \right\}. \quad (25)$$

Zauważmy, że warunek  $f \in \mathcal{R}_r$  dla  $r > 1$  implikuje, że  $\mathbb{P}(A < 1) = 1$ . Metoda dowodowa punktów (i) i (ii) Twierdzenia 2 nie pozwala na opis przypadku  $r \in \{1, +\infty\}$ .

Zauważmy, że równanie (21) można sprowadzić do

$$-\log \mathbb{E} \left[ e^{\psi(zA) - \psi(z)} \right] = \log \mathbb{E}[e^{zB}], \quad (26)$$

gdzie  $\psi = \log \phi_X$ . Dowód opiera się na obserwacji, że dla nieznanej funkcji  $\psi$  zachodzi

$$-\log \mathbb{E} \left[ e^{\psi(zA) - \psi(z)} \right] \sim -\log \mathbb{E} \left[ e^{-z\psi'(z)(1-A)} \right], \quad z \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

By udowodnić ten fakt wystarczy (21), własności rozkładu  $A$  oraz wypukłość i monotoniczność funkcji  $\psi$ .

W dalszej części dowodu korzystamy z dwóch klasycznych twierdzeń tauberowskich Kasahary oraz de Bruijna, które w [H2] zostały sformułowane w nowy sposób. Równoważność tych sformułowań jest nietrywialna [H2, §2.4 oraz §7]. Otrzymujemy z nich

$$\log \mathbb{E}[e^{zB}] \sim k^*(z) \quad \text{oraz} \quad -\log \mathbb{E}[e^{-z\psi'(z)(1-A)}] \sim (f^*)^{-1}(z\psi'(z)).$$

Równania (26) oraz (27) pozwalają zatem znaleźć asymptotykę funkcji  $\psi'$ . Z niej możemy odczytać asymptotykę  $\psi$  oraz ponownie skorzystać z Twierdzenia Kasahary, które implikuje

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim \psi^*(x).$$

*Zależne  $A$  i  $B$  - dolne ograniczenie*

Punkt (iii) Twierdzenia 2 pokazuje, że jeśli  $A$  i  $B$  są niezależne, to funkcja  $h$  jest asymptotycznie porównywalna z logarytmem ogona  $X$ . Hipoteza badawcza postawiona przez habilitanta zakładała, że tak się dzieje również w sytuacji, gdy  $A$  i  $B$  nie są niezależne. Poniżej prezentujemy dolne ograniczenie na logarytmiczny ogon z funkcją  $h$  oraz jawną stałą. Stała ta zależy od indeksu  $\gamma$  funkcji  $h \in \mathcal{R}_\gamma$  oraz od granicy w  $+\infty$  funkcji  $t$ , którą wprowadzamy poniżej.

Z definicji funkcji  $h$ , zob. (25), wynika istnienie funkcji  $t$ , takiej że

$$h(x) = -t(x) \log \mathbb{P} \left( \frac{1}{1-A} > t(x), B > \frac{x}{t(x)} \right) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

Funkcja  $t$  nie jest wyznaczona jednoznacznie. W szczególności można skonstruować przykład rozkładu  $(A, B)$ , gdzie funkcja

$$(1, x] \ni t \mapsto -t \log \left( \frac{1}{1-A} > t, B > \frac{x}{t} \right)$$

jest funkcją stałą [H2, Remark 4.2]. Ponieważ funkcja  $t$  z (28) nie jest wyznaczona jednoznacznie, jej granica w  $+\infty$  również nie musi być wyznaczona jednoznacznie. W takiej sytuacji poniższy wynik jest prawdziwy dla wszystkich granic  $t_\infty$ , jakie może posiadać funkcja  $t$ .

**Twierdzenie 3** (Theorem 5.1 w [H2]).

Założmy, że funkcja  $h$  zdefiniowana w (25) należy do  $\mathcal{R}_\gamma$  z  $\gamma \in [1, +\infty]$ . Jeśli  $\gamma = +\infty$ , to zakładamy dodatkowo, że  $h \in \Gamma \subset \mathcal{R}_\infty$ . Przyjmijmy, że dla funkcji  $t$ , spełniającej (28), zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = t_\infty \in (1, +\infty].$$

Wtedy,

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h(x)} \geq -c_{t_\infty, \gamma}, \quad (29)$$

gdzie  $c_{t, \gamma}$  jest dodatnią stałą zdefiniowaną poniżej: dla  $t \in (1, +\infty)$  oraz  $\gamma \in (1, +\infty)$ , definiujemy

$$c_{t, \gamma} = \left[ t \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{t} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right\} \right]^{\gamma-1},$$

$$c_{t, 1} = c_{\infty, 1} = 1, \quad c_{\infty, \gamma} = \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^{\gamma-1}, \quad c_{t, \infty} = \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{1+t}, \quad c_{\infty, \infty} = e.$$

Metoda dowodowa, w zależności od przypadku, opiera się na podejściu zaprezentowanym wcześniej, tzn. prowadzącym do (20) lub na poniższej modyfikacji. Rozważmy ciągi liczbowe  $(\delta_k)_{k \geq 1}$  oraz  $(b_k)_{k \geq 1}$ ,  $\delta_k \in (0, 1)$  i  $b_k > 0$  dla  $k \in \mathbb{N}$ , spełniające warunek

$$\sum_{k=1}^n (1 - \delta_1) \cdots (1 - \delta_{k-1}) b_k \geq x. \quad (30)$$

Zakładamy, że elementy tych ciągów jak i ich liczba  $n$  mogą być funkcjami zmiennej  $x$ . Na zbiorze  $\bigcap_{k=1}^n \{A_k > 1 - \delta_k, B_k > b_k\}$  mamy

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} A_1 \cdots A_{k-1} B_k \geq \sum_{k=1}^n (1 - \delta_1) \cdots (1 - \delta_{k-1}) b_k.$$

Zatem (30) implikuje

$$\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^n \{A_k > 1 - \delta_k, B_k > b_k\} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k). \quad (31)$$

Zaprezentujemy tutaj prosty przykład wykorzystania tej nierówności mający na celu zaprezentowanie głównej idei dowodu. Rozumowania przedstawione w [H2] są bardziej technicznie skomplikowane. Rozważmy  $(\delta_k, b_k) = (1/t(y), y/t(y))$  dla  $k = 1, \dots, n = \lceil t(y) \rceil$ . Wtedy (30) sprowadza się do

$$(1 - (1 - t(y)^{-1})^{\lceil t(y) \rceil}) y \geq x.$$

Zauważmy, że dla  $t \geq 1$  mamy  $(1 - t^{-1})^{\lceil t \rceil} \leq (1 - t^{-1})^t \leq e^{-1}$ . Jeśli  $y = x/(1 - e^{-1})$ , to powyższy warunek jest spełniony dla dowolnego  $x$ . Zatem, dla  $y = x/(1 - e^{-1})$  i dowolnego  $x$ , (31) implikuje

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P}(X > x) &\geq \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k) = \lceil t(y) \rceil \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{1-A} > t(y), B > \frac{y}{t(y)}\right) \\ &= \frac{\lceil t(y) \rceil}{t(y)}(-h(y) + o(1)), \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystano (28). Korzystając z faktu, że dla  $t \geq 1$  mamy  $\lceil t \rceil/t \leq 2$ , otrzymujemy dla dowolnego  $x \geq 0$ ,

$$\log \mathbb{P}(X > x) \geq -2h\left(\frac{x}{1 - e^{-1}}\right) + o(1).$$

Zauważmy, że nie wykorzystano powyżej żadnych własności asymptotycznych funkcji  $h$  oraz  $t$ .

#### Zależne $A$ i $B$ - górne ograniczenie

Górne ograniczenie dla zależnych  $A$  i  $B$  wydaje się być znacznie trudniejsze do badania. W pracy [H2] znaleziono górne ograniczenie równe dolnemu ograniczeniu tylko w szczególnych przypadkach: poza niezależnymi  $A$  i  $B$  również dla tzw. komonotonicznych  $A$  i  $B$ . Wyniki te pozwalają na wyprowadzenie ograniczeń górnych (w ogólności nieoptymalnych) dla dowolnej struktury zależności wektora  $(A, B)$ . Główny argument opiera się na poniższym lemacie.

**Lemat 2** (Lemma 2.2 w [H2]).

Jeśli  $(A, B)$  i  $(A', B')$  są wektorami o takich samych rozkładach brzegowych oraz spełniającymi

$$\mathbb{P}(A \leq x, B \leq y) \leq \mathbb{P}(A' \leq x, B' \leq y), \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

oraz  $X$  i  $X'$  są rozwiązaniami (2), odpowiadającymi  $(A, B)$  i  $(A', B')$ , to dla dowolnej wypukłej i monotonicznej funkcji  $f$  zachodzi

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(X')]. \quad (33)$$

Z uwagi na (33), naturalne jest studiowanie ekstremalnych w sensie częściowego porządku (32) struktur zależności wektorów  $(A, B)$ .

Niech  $F_A$  i  $F_B$  będą dystrybuantami rozkładów  $A$  i  $B$ . Zdefiniujmy dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\underline{F}(x, y) := \max\{F_A(x) + F_B(y) - 1, 0\} \quad \text{oraz} \quad \overline{F}(x, y) := \min\{F_A(x), F_B(y)\}.$$

Zauważmy, że  $\overline{F}$  jest dystrybuantą wektora  $(F_A^{-1}(U), F_B^{-1}(U))$ , gdzie  $U$  ma rozkładu jednostajny na odcinku  $[0, 1]$ , a  $F_A^{-1}$  i  $F_B^{-1}$  są uogólnionymi odwrotnościami dystrybuant  $F_A$  i  $F_B$ . Podobnie,  $\underline{F}$  jest dystrybuantą pary  $(F_A^{-1}(U), F_B^{-1}(1-U))$ . Ponadto zachodzi tzw. nierówność Fréchet-Hoeffdinga, czyli

$$\underline{F} \leq F_{(A,B)} \leq \overline{F}, \quad (34)$$

gdzie  $F_{(A,B)}$  jest dowolną dystrybuantą wektora  $(A, B)$ . Podkreślmy, że wszystkie dystrybuanty dwuwymiarowe  $\underline{F}$ ,  $\overline{F}$  oraz  $F_{(A,B)}$  mają takie same rozkłady brzegowe.

Powiemy, że  $A$  i  $B$  są *komonotoniczne*, jeśli  $F_{(A,B)} = \overline{F}$  oraz że są *antymonotoniczne* (ang. *countermonotonic*), jeśli  $F_{A,B} = \underline{F}$ . Z (34) wynika, że rozkład komonotonicznych  $A$  i  $B$  jest maksymalny, a rozkład antymonotonicznych  $A$  i  $B$  jest minimalny w sensie częściowego porządku (32).

W dalszych rozważaniach ustalamy rozkłady brzegowe  $A$  i  $B$  i próbujemy zrozumieć jaki wpływ na asymptotykę ogona  $X$  ma struktura zależności wektora  $(A, B)$ . Oznaczmy

$$\gamma = \frac{\alpha r}{\alpha + r - 1}.$$

Niech  $X_{co}$  oznacza rozwiązanie (2) odpowiadające komonotonicznej parze  $(A, B)$  oraz niech  $h_{co}$  będzie funkcją  $h$  powiązaną z tą parą (25). Dalej, niech  $h_{ind}$  będzie funkcją  $h$  odpowiadającą niezależnym  $A$  i  $B$ . W (36) przyjmujemy, że zmienna losowa  $X$  jest rozwiązaniem (2), ale nie wiemy o strukturze zależności wektora  $(A, B)$ . W poniższym twierdzeniu założenie (35) dotyczy tylko rozkładów brzegowych  $A$  i  $B$ .

**Twierdzenie 4** (Theorem 6.1 w [H2]).

Założmy, że dla funkcji  $f$  i  $k$  zdefiniowanych w (22) mamy

$$f \in \mathcal{R}_r, \quad r \in (1, +\infty), \quad \text{oraz} \quad k \in \mathcal{R}_\alpha, \quad \alpha \in (1, +\infty). \quad (35)$$

Niech  $X$  będzie rozwiązaniem (2). Wtedy zachodzi

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{co}(x)} \leq - \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma - 1}. \quad (36)$$

Dla komonotonicznych  $A$  i  $B$  mamy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X_{co} > x)}{h_{co}(x)} = - \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma - 1}. \quad (37)$$

Dowód górnego ograniczenia (36) oparty jest na Lematach 1 i 2. Rozważamy najpierw (17) dla komonotonicznych  $A$  i  $B$  i funkcji  $\phi_C$ , zdefiniowanej przez równość  $\phi_C^* = Ch_{co}^*$ . Wtedy z nierówności wykładniczej Markowa dla  $z, x > 0$  mamy

$$\log \mathbb{P}(X > x) \leq \log \mathbb{E}[e^{zX}] - zx \stackrel{(33)}{\leq} \log \mathbb{E}[e^{zX_{co}}] - zx \stackrel{(18)}{\leq} \phi_C(z) - zx + c$$

gdzie w drugiej nierówności skorzystano z Lematu 2. Biorąc  $\inf_z$  prawej strony, otrzymujemy  $-(\phi_C^*)^* + c = -Ch_{co}(x) + c$ . Biorąc następnie supremum po stałych  $C$ , dla których (17) jest spełnione otrzymujemy (36). Jeśli  $A$  i  $B$  są komonotoniczne, to (36) wraz z Twierdzeniem 3 implikują (37). Należy podkreślić, że główna trudność w tym dowodzie jest ukryta w badaniu zachodzenia (17).

Więcej można powiedzieć o sytuacji, gdy  $(A, B)$  dominują lub są dominowane (w sensie (32)) przez zmienne niezależne. Powiemy, że  $A$  i  $B$  są *ujemnie kwadrantowo zależne* (NQD), jeśli (32) zachodzi dla niezależnych  $A'$  i  $B'$  oraz że  $A'$  i  $B'$  są  *dodatnio kwadrantowo zależne* (PQD), jeśli (32) zachodzi dla niezależnych  $A$  i  $B$ .

Przy założeniach Twierdzeń 4 i 5 mamy [H2, Theorem 4.1 (d)]

$$h_{ind}(x) \sim \frac{\alpha + r - 1}{\alpha - 1} \left( \frac{\alpha - 1}{r} \right)^{r/(\alpha + r - 1)} h_{co}(x).$$



**Twierdzenie 5** (Theorem 6.1 w [H2]).

Załóżmy, że (35) jest spełnione oraz  $X$  jest rozwiązaniem (2).

(i) Jeśli  $A$  i  $B$  są ujemnie kwadrantowo zależne, to

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{ind}(x)} \leq - \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1}. \quad (38)$$

(ii) Jeśli  $A$  i  $B$  są dodatnio kwadrantowo zależne, to

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1} &\leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{ind}(x)} \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{ind}(x)} \leq - \frac{\alpha - 1}{\alpha + r - 1} \left( \frac{r}{\alpha - 1} \right)^{r/(\alpha+r-1)} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

### 4.3.5 Praca [H3]

Przedstawimy teraz pokrótce znane wyniki opisujące asymptotykę ogona  $X$  w tzw. sytuacji ciężkoogonowej, tworząc w ten sposób kontekst do wyników otrzymanych przez habilitanta. Być może najciekawszy (zarówno pod względem matematycznym jak i możliwych zastosowań), a na pewno najlepiej opisany przypadek dotyczy założenia typu Cramerowskiego na  $A$ , czyli sytuacji gdy istnieje stała  $\kappa > 0$ , dla której  $\mathbb{E}[|A|^\kappa] = 1$ . Oczywiście warunek ten stanowi przykład sytuacji ciężkoogonowej (13). Poniżej prezentujemy podstawowy wynik przy założeniu Cramerowskim w sformułowaniu Goldiego [27], który wcześniej rozważany był również przez Kestena [41] i Grincievičiusa [32]. Przez  $a_+$  będziemy oznaczali  $\max\{a, 0\}$ .

**Twierdzenie 6** (Kesten-Grincievičius-Goldie).

Załóżmy, że  $A \geq 0$  p.n. Jeśli istnieje stała  $\kappa > 0$ , taka że  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ ,  $\mathbb{E}[|B|^\kappa] < +\infty$ ,  $m_\kappa = \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty$  oraz rozkład warunkowy  $\log(A) \mid A > 0$  jest niearytmetyczny, to dla  $X$  spełniającego (2) zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{\mathbb{E}[(AX + B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} \in [0, +\infty). \quad (40)$$

Rozkład prawdopodobieństwa nazywamy *niearytmetycznym*, jeśli jego nośnik nie jest zawarty w  $d\mathbb{Z}$  dla dowolnego  $d > 0$ . Zauważmy, że warunki dostateczne (8) istnienia rozwiązania  $X$  są implikowane przez założenia  $\mathbb{E}[|B|^\kappa] = 1$  i  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$  (przypadek  $\mathbb{P}(A = 1) = 1$  jest wykluczony przez założenie o niearytmetyczności rozkładu). Przy dodatkowym założeniu (9), prawa strona (40) jest ściśle dodatnia. Dowód powyższego Twierdzenia zwykle jest przeprowadzany za pomocą teorii odnowy [41, 32, 27]. Znane są jednak bardziej bezpośrednie argumenty, w których identyfikuje się istotne składniki sumy (11) [13, 10]. Twierdzenie to opisuje bardzo ciekawy mechanizm: ograniczone  $A$  i  $B$  mogą generować  $X$  o ciężkim ogonie, a asymptotyka tego ogona wynika z klastrowania dużych wartości iloczynów  $(B_{n+1} \prod_{k=1}^n A_k)_{n \geq 1}$  w sumie (11). Przy założeniu  $\mathbb{E}[|B|^\kappa] < +\infty$ , rozkład  $B$  ma wkład w asymptotykę ogona  $X$  tylko poprzez stałą w (40) i w tym sensie można powiedzieć, że to rozkład  $A$  dominuje tutaj rozkład  $B$ .

Drugi wynik, istotny w kontekście omawianej pracy przypisywany jest parze Grincievičius-Grey [32, 31]. Rozważali oni założenia prowadzące do ciężkoogonowego  $X$ , w których wkład

do asymptotyki ogona  $X$  dominowany był przez  $B$ . Założenia poniższego twierdzenia dopuszczają oba reżimy na rozkład  $A$ , (13) oraz (14).

Przypomnijmy, że  $\mathcal{R}_0$  jest klasą funkcji wolnozmiennych się.

**Twierdzenie 7** (Grincievičius-Grey).

Założmy, że  $A \geq 0$  p.n. Jeśli dla pewnych  $\alpha, \varepsilon > 0$  oraz  $L \in \mathcal{R}_0$  mamy  $\mathbb{P}(B > x) = L(x)/x^\alpha$ ,  $\mathbb{E}[A^\alpha] < 1$  oraz  $\mathbb{E}[A^{\alpha+\varepsilon}] < +\infty$ , to dla  $X$  spełniającego (2) zachodzi

$$\mathbb{P}(X > x) \sim \frac{1}{1 - \mathbb{E}[A^\alpha]} \mathbb{P}(B > x). \quad (41)$$

Zauważmy, że w obu powyższych twierdzeniach struktura zależności wektora  $(A, B)$  nie jest istotna, tzn. założenia dotyczą wyłącznie rozkładów brzegowych  $(A, B)$ . Struktura zależności  $(A, B)$  objawia się (albo czasem nawet nie) tylko w stałej, co jest typową obserwacją dla przypadków ciężkoogonowych (patrz również [23, 43, 19]). Przedmiotem naszych badań był przypadek mieszczący się niejako pomiędzy założeniami Twierdzeń 6 i 7.

Rozważmy parę  $(A, B)$  spełniającą następujące założenia: dla pewnych stałych  $\alpha, \kappa, \varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A^\kappa] = 1 \quad \text{oraz} \quad E[A^\kappa \log(A)] < +\infty \\ \text{oraz} \quad \text{rozkład warunkowy } \log(A) \mid A > 0 \text{ jest niearytmetyczny} \\ \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B > x) = L(x)x^{-\alpha} \text{ dla wolnozmiennącej się funkcji } L. \end{aligned} \quad (42)$$

Dla uproszczenia poniższej prezentacji rozważmy dodatkowo warunek  $\mathbb{P}(B \geq 0) = 1$ . Jeśli poza założeniami (42), spełniony jest jeden z poniższych dwóch warunków:

- $\alpha > \kappa$ ,
- $\alpha = \kappa$  i  $\int_0^{+\infty} L(t)/t dt < +\infty$ ,

to mamy  $\mathbb{E}[B^\kappa] = \kappa \int_0^{+\infty} t^{\kappa-1} \mathbb{P}(B > t) dt = \kappa \int_0^{+\infty} t^{\kappa-\alpha-1} L(t) dt < +\infty$ , więc z Twierdzenia 6 otrzymujemy  $x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \rightarrow c$  dla  $c = \mathbb{E}[(AX + B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa] / (\kappa m_\kappa)$ .

Jeśli  $\alpha < \kappa$ , to z kolei z Twierdzenia 7 uzyskujemy  $x^\alpha \mathbb{P}(X > x) L(x) \rightarrow \tilde{c}$  dla  $\tilde{c} = 1/(1 - \mathbb{E}[A^\alpha])$ . Rzeczywiście, z nierówności Jensena mamy wtedy  $\mathbb{E}[A^\alpha] < (\mathbb{E}[A^\kappa])^{\alpha/\kappa} = 1$ .

Do pełnego opisu tej ciężkoogonowej sytuacji brakuje przypadku „pomiędzy”, czyli

- $\alpha = \kappa$  i  $\int_0^{+\infty} L(t)/t dt = +\infty$ .

Zauważmy, że przy tych założeniach stałe  $c$  i  $\tilde{c}$  wybuchają. Należy się zatem spodziewać istotnie innego typu asymptotyki oraz mechanizmu za nią stojącego, niż te opisane przez Twierdzenia 6 i 7. Przy tych założeniach, analiza ogona rozwiązania równania (1), gdy losowa Lipschitzowska funkcja  $\Psi$  spełnia warunek

$$\max\{Ax, B\} \leq \Psi(x) \leq Ax + B, \quad x \in \mathbb{R} \text{ p.n.} \quad (43)$$

była tematem prac [H3] i [H4].<sup>1</sup>

W literaturze rozważanych było kilka innych twierdzeń, w których badano ogon rozwiązania (2) gdy któreś z założeń Twierdzenia 6 nie było spełnione. Poniżej prezentujemy główne założenia, przy których znana jest asymptotyka ogona.<sup>2</sup> Pierwsze trzy punkty dotyczą sytuacji, gdy rozkład warunkowy  $\log(A) \mid A > 0$  jest niearytmetyczny:

<sup>1</sup>W rzeczywistości w Theorem 1.3 w [H4] rozważano nieznacznie ogólniejsze ograniczenia na  $\Psi$ .

<sup>2</sup>W każdym z tych wyników potrzebne są jeszcze dodatkowe, często bardzo techniczne, założenia.

- (a)  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ ,  $\mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] = +\infty$ ,  $\mathbb{E}[B^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$  [43] i  $\mathbb{E}[B^\kappa] < +\infty$  [39],
- (b)  $\mathbb{E}[A^\kappa] < 1$ ,  $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] = +\infty$ ,  $\mathbb{E}[B^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$  [43],
- (c)  $\mathbb{E}[A^\kappa] < 1$ ,  $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] = +\infty$ ,  $\mathbb{E}[B^{\kappa+\varepsilon}] = +\infty$  oraz  $\mathbb{E}[B^\kappa] < +\infty$  [19],
- (d)  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ ,  $\mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty$ ,  $\mathbb{E}[B^\kappa] < +\infty$ , rozkład warunkowy  $\log(A) \mid A > 0$  jest arytmetyczny [44].

Dowody twierdzeń w pracach [43, 44] opierają się na podejściu zaprezentowanym przez Goldiego [27], czyli na *uwikłanym równaniu odnowy* (ang. *implicit renewal theory*). W pracy [39] znaleziono asymptotykę uciętego momentu  $X$  (a nie ogona), tzn. funkcji  $x \mapsto \mathbb{E}[X^\kappa I_{X \leq x}]$ , gdy  $x \rightarrow +\infty$ . Metoda dowodowa jest jednak zupełnie inna niż w [27], ponieważ oparty jest na wielokrotnym zastosowaniu tauberowskiego Twierdzenia Karamaty. Dowód [19] z kolei ideologicznie jest bardzo blisko oryginalnemu dowodowi Twierdzenia 7.

Metodologia Goldiego [27] została wykorzystana również w pracach [H3] i [H4] i z tego względu wyprowadzimy ją poniżej. Opiszemy jej główne założenia, a następnie podkreślimy podstawowe różnice i problemy, które pojawiają się przy naszych założeniach, a które nie występowały w [27]. Przyjęte przez nas założenia wymagały istotnych zmian w dowodzie w stosunku do [27].

W pierwotnym zamyśle obie prace [H3] i [H4] stanowiły jedną całość i tak też można je rozpatrywać. Motywacja do powstania tych prac pochodzi z [20], gdzie rozważano wektorową (w  $\mathbb{R}^2$ ) wersję równania (2), gdy  $A$  jest pewną szczególną macierzą  $2 \times 2$  górnotrójkątną. Problem znalezienia asymptotyki ogonów rozkładów brzegowych wektora  $X$  jest wtedy bardzo zbliżony do problemu, który rozważamy tutaj.

Praca [H3] dotyczy równania maksymalnego (3). W pracy [H4] analizowano równanie afiniczne (2) oraz, z wykorzystaniem wyników z [H3], analizowano ogólne równanie (1), gdy  $\Psi$  spełnia (43). Należy tutaj podkreślić, że analiza rozwiązania równania maksymalnego jest bardzo zbliżona do analizy równania afinicznego. W szczególności, jeśli (8) jest spełnione, to wiemy, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie (3) oraz zachodzi  $X \stackrel{d}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{B_n \prod_{j=1}^{n-1} A_j\}$ . Co więcej, Goldie w [27] również badał ogon rozwiązania równania maksymalnego tą samą metodą co równania afinicznego. Przy innych założeniach równania maksymalne oraz powiązane z nimi zaburzone błędzenia losowe były analizowane m.in. w [3] oraz [49]. Przejdziemy teraz do opisu metodologii Goldiego.

#### *Uwikłane równanie odnowy*

Przy założeniu  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$  miara borelowska zdefiniowana przez

$$\mu_A(\cdot) = \mathbb{E}[A^\kappa \mathbf{1}_{\log(A) \in \cdot}] \quad (44)$$

jest probabilistyczna. Pierwszy moment miary  $\mu_A$  wynosi  $\int_{\mathbb{R}} t \mu_A(dt) = \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)]$ . Wartość ta jest dodatnia, być może nieskończona. Wynika to ze ścisłej wypukłości funkcji  $[0, +\infty) \ni \alpha \mapsto \mathbb{E}[A^\alpha]$  (gdy rozkład  $A$  nie jest jednopunktowy) oraz z faktu, że funkcja ta przyjmuje wartość 1 w punktach  $\alpha = 0$  i  $\alpha = \kappa$ . Zatem jej pochodna w  $\kappa$ , równa właśnie  $\mathbb{E}[A^\kappa \log(A)]$ , jest ściśle dodatnia.

W dalszych rozważaniach  $X$  jest rozwiązaniem (2) lub (3). Zdefiniujmy dwie funkcje rzeczywiste:

$$f(x) = e^{\kappa x} \mathbb{P}(X > e^x) \quad \text{oraz} \quad \psi(x) = e^{\kappa x} (\mathbb{P}(X > e^x) - \mathbb{P}(AX > e^x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (45)$$

przy czym będziemy rozważać funkcję  $\psi$ , gdy  $A$  i  $X$  są niezależne. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= \psi(x) + e^{\kappa x} \mathbb{P}(AX > e^x) = \psi(x) + e^{\kappa x} \mathbb{E} \left[ \mathbb{P} \left( X > e^{x - \log(A)} \mid A \right) \right] \\ &= \psi(x) + \mathbb{E}[A^\kappa f(x - \log A)] = \psi(x) + \int_{\mathbb{R}} f(x - z) \mu_A(dz). \end{aligned}$$

W trzeciej równości powyżej skorzystano z niezależności  $A$  i  $X$  oraz z definicji funkcji  $f$ . Jest to tzw. równanie odnowy z niewiadomą funkcją  $f$ . Od klasycznej sytuacji odróżnia je fakt, że funkcja  $\psi$  również nie jest znana oraz jest silnie związana z funkcją  $f$ . Co zaskakujące, nie przeszkadza to w badaniu asymptotycznych własności  $f$ .

Poprzez iterację powyższego równania otrzymujemy dla  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \psi(x - z) \mu_A^{*k}(dz) + \int_{\mathbb{R}} f(x - z) \mu_A^{*n}(dz),$$

gdzie  $\mu_A^{*n}$  jest  $n$ -krotnie splecioną ze sobą miarą  $\mu_A$  oraz  $\mu_A^{*0} = \delta_0$ . Pokażemy teraz, że drugi składnik prawej strony powyższego równania punktowo zbiega do zera, gdy  $n \rightarrow +\infty$ . Z nierówności Markowa mamy  $f(x) \leq \mathbb{E}[X^{\kappa - \varepsilon}] e^{\varepsilon x}$  dla  $x \in \mathbb{R}$  i  $\varepsilon \in (0, \kappa)$ , przy czym z (11) szybko wynika, że  $\mathbb{E}[X^{\kappa - \varepsilon}] < +\infty$  dla  $\varepsilon \in (0, \kappa)$ . Stąd

$$\int_{\mathbb{R}} f(x - z) \mu_A^{*n}(dz) \leq \mathbb{E}[X^{\kappa - \varepsilon}] \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon(x - z)} \mu_A^{*n}(dz) = \mathbb{E}[X^{\kappa - \varepsilon}] \mathbb{E}[A^{\kappa - \varepsilon}]^n e^{\varepsilon x} \rightarrow 0,$$

gdy  $n \rightarrow +\infty$ . Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  otrzymujemy zatem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(x - z) \mu_A^{*k}(dz) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - z) H_{\mu_A}(dz), \quad (46)$$

gdzie

$$H_{\mu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{*n}$$

jest tzw. *miarą odnowy* dla miary probabilistycznej  $\mu$ .

Fundamentalnym wynikiem w teorii odnowy jest Twierdzenie Blackwella, które mówi, że jeśli  $m_{\mu} := \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) \in (0, +\infty]$  oraz rozkład  $\mu$  jest niearytmetyczny, to dla każdego  $t > 0$  zachodzi [8]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H_{\mu}((x, x + t]) = \frac{t}{m_{\mu}}. \quad (47)$$

Istnieje również wersja powyższego wyniku dla miar arytmetycznych. Zauważmy, że założenie o niearytmetyczności rozkładu warunkowego  $\log(A) \mid A > 0$  implikuje, że miara  $\mu_A$  również jest niearytmetyczna. Dalej będziemy rozważali sytuację, gdy miary  $\mu$  i  $\mu_A$  są niearytmetyczne. Twierdzenie Blackwella implikuje tzw. *kluczowe twierdzenie o odnowie* (ang. *Key Renewal Theorem*), które pozwala znajdować granice przy  $x \rightarrow +\infty$  wyrażeń typu  $\int_{\mathbb{R}} g(x - t) H_{\mu}(dt)$ . O funkcji  $g$  zakłada się wtedy, że jest *bezpośrednio całkowalna w sensie Riemanna* (d.R.i., ang. *directly Riemann integrable*), tzn. jej górne i dolne sumy Riemanna

na całej (nieograniczonej) dziedzinie zbiegają do tej samej skończonej granicy, gdy średnica podziału zbiega do zera. W takiej sytuacji otrzymujemy [4, Theorem 4.2]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x-t) H_{\mu}(dt) = \frac{1}{m_{\mu}} \int_{\mathbb{R}} g(t) dt.$$

W Twierdzeniu 6 założono  $\mathbb{E}[|B|^{\kappa}] < +\infty$ . Warunek ten implikuje, że funkcja  $\psi$  jest całkowalna, ale nie wszystkie funkcje całkowalne są d.R.i. Problem ten omija się poprzez zastosowanie tzw. operatora gładzącego  $f \mapsto \hat{f}: t \mapsto \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} f(x) dx$ . Operator ten przeprowadza funkcje całkowalne na funkcje d.R.i. [27, Lemma 9.2]. Przykładając go do obu stron (46) otrzymujemy

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(t-z) H_{\mu_A}(dz).$$

Zatem jeśli  $\mathbb{E}[|B|^{\kappa}] < +\infty$ , to kluczowe twierdzenie o odnowie implikuje, że

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{f}(t) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} x \mu_A(dx)} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(x) dx = \frac{1}{\mathbb{E}[A^{\kappa} \log(A)]} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx.$$

Łatwo pokazać, że prawa strona powyższej równości jest tożsama prawej stronie (40). Ostatecznie, elementary argument tauberowski [27, Lemma 9.3] implikuje, że

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{f}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\kappa} \mathbb{P}(X > x),$$

co kończy dowód Goldiego.

W pracach [H3] i [H4] rozważano warunek  $\mathbb{E}[B_+^{\kappa}] = +\infty$ , który implikuje, że funkcja  $\psi$  nie jest całkowalna, więc powyższy argument musi być odpowiednio dostosowany. W naszym podejściu regularyzacja równania (46) nie jest potrzebna. Przy dodatkowym założeniu  $\mathbb{P}(B > x) = L(x)/x^{\kappa}$ ,  $L \in \mathcal{R}_0$ , zdefiniujemy dwie funkcje rzeczywiste

$$\psi_B(x) := e^{\kappa x} \mathbb{P}(B > e^x) = L(e^x) \quad \text{oraz} \quad \psi_0(x) := \psi(x) - \psi_B(x). \quad (48)$$

Wtedy (46) sprowadza się do

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} L(e^{x-z}) H_{\mu_A}(dz) + \int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz). \quad (49)$$

Jeśli  $X$  jest rozwiązaniem równania maksymalnego (3), to można pokazać, bez odwoływania się do kluczowego twierdzenia o odnowie, że  $\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz)$  ma skończoną granicę oraz ją znaleźć, zob. dowód [H3, Theorem 4.2]. W takiej sytuacji pozostaje badanie asymptotyki dominującego składnika, czyli  $\int_{\mathbb{R}} L(e^{z-x}) H_{\mu_A}(dz)$ .

Poniższe twierdzenia są głównym technicznym wynikiem dotyczącym teorii odnowy w pracy [H3]. Twierdzenia te pozwalają znaleźć asymptotykę pierwszego (punkt (i) poniżej) i drugiego (punkt (ii)) rzędu dominującego składnika prawej strony (49).

Powiemy, że rozkład  $\mu$  jest *silnie niekratowy* (ang. *strongly non-lattice*), jeśli

$$\limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itz} \mu(dt) \right| < 1.$$

### **Twierdzenie 8.**

Niech  $\mu$  będzie rozkładem prawdopodobieństwa, dla którego  $m_{\mu} = \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) \in (0, +\infty)$ , oraz niech  $L$  będzie funkcją wolnozmiennającą się, dla której  $\int_1^{+\infty} L(t)/t dt = +\infty$ .

(i) [H3, Theorem 3.1] *Jeśli rozkład  $\mu$  jest niearytmetyczny, to*

$$\int_{(0,x]} L(e^{x-z}) H_\mu(dz) \sim \frac{1}{m_\mu} \int_1^{\exp(x)} \frac{L(t)}{t} dt.$$

(ii) [H3, Theorem 3.2 oraz komentarz pod jego sformułowaniem] *Założmy, że rozkład  $\mu$  jest silnie niekratowy. Przypuśćmy, że dla  $\varepsilon, r > 0$  mamy  $\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon t} \mu(dt) < +\infty$  oraz  $\mu((-\infty, x]) = o(e^{rx})$ . Wtedy*

$$\int_{\mathbb{R}} L(e^{x-z}) H_\mu(dz) = \frac{1}{m_\mu} \int_0^{\exp(x)} \frac{L(t)}{t} dt + O(L(e^x)). \quad (50)$$

Założenie o silnej niekratowości pozwala skorzystać z wyników [52], gdzie przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi

$$H_\mu((-\infty, x)) = \frac{x}{m_\mu} + c + o(e^{-rx}), \quad x \rightarrow \infty,$$

dla pewnych stałych  $c, r > 0$ . Warunkiem dostatecznym silnej niekratowości miary  $\mu_A$  jest, by rozkład zmiennej losowej  $A$  posiadał nietrywialną składową absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a [H3, Remark 4.3].

Wiadomo, że jeśli funkcja  $L$  jest wolnozmiennająca się, to funkcja  $\tilde{L}: x \mapsto \int_1^x L(t)/t dt$  również jest wolnozmiennająca się oraz  $\tilde{L}(x)/L(x) \rightarrow +\infty$  gdy  $x \rightarrow +\infty$  [7, §3.0]. Oznacza to, że (50) opisuje asymptotykę drugiego rzędu.

Głównym probabilistycznym wynikiem pracy [H3] jest poniższe twierdzenie. Punkt (i) dotyczy asymptotyki pierwszego rzędu, a punkt (ii) asymptotyki drugiego rzędu ogona rozwiązania równania maksymalnego.

**Twierdzenie 9** (Theorem 4.2 w [H3]).

*Założmy, że*

(A-1)  *$A \geq 0$  p.n. oraz że rozkład warunkowy  $\log(A) \mid A > 0$  jest niearytmetyczny,*

(A-2) *istnieje stała  $\kappa > 0$ , dla której  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ ,  $m_\kappa := \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty$ ,*

(B-1)  *$L(x) := x^\kappa \mathbb{P}(B > x) \in \mathcal{R}_0$  oraz  $\mathbb{E}[B_+^\kappa] = +\infty$ .*

*Niech  $X$  będzie rozwiązaniem (3).*

(i) *Jeśli istnieje stała  $\eta \in (0, \kappa)$ , dla której  $\mathbb{E}[A^\eta B_+^{\kappa-\eta}] < +\infty$ , to*

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \sim \frac{1}{m_\kappa} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt \sim \frac{1}{\kappa m_\kappa} \mathbb{E}[B_+^\kappa I_{B \leq x}].$$

(ii) *Jeśli  $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$  dla  $\varepsilon > 0$  oraz rozkład  $\mu_A$  zdefiniowany w (44) jest silnie niekratowy, to*

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{m_\kappa} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt - \frac{\mathbb{E}[\min\{AX, B\}_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + O(L(x)).$$

Założenie  $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$  implikuje  $\mathbb{E}[A^\eta B_+^{\kappa-\eta}] < +\infty$  dla  $\eta \in (0, \kappa)$ , skąd z kolei mamy  $\mathbb{E}[\min\{AX, B\}_+^\kappa] < +\infty$ .

### 4.3.6 Praca [H4]

Praca [H4] w głównej mierze dotyczy badania rozwiązań równania afinicznego (2). Uzyskane wyniki wspólnie z wynikami z [H3] dotyczącymi równania maksymalnego (3) są wykorzystywane do znalezienia asymptotyki ogona rozwiązań (1), gdy

$$\max\{Ax, B\} \leq \Psi(x) \leq Ax + B, \quad \text{p.n.}$$

*Asymptotyka pierwszego rzędu*

Jeśli  $X$  jest rozwiązaniem równania afinicznego, to możemy zdefiniować funkcje  $f$  i  $\psi$  tak samo jak w (45) dla równania maksymalnego i otrzymać (46) oraz (49). Jednak pokazanie, że funkcja  $\psi_0$  jest d.R.i jest dla równania afinicznego dużo trudniejsze. Z tego względu zastosowano modyfikację podejścia Goldiego, zaczerpniętą z pracy [11]. Funkcje  $f$  oraz  $\psi$  zostały zdefiniowane wzorami

$$f(x) = e^{\kappa x} \mathbb{E}[g(e^{-x}X)] \quad \text{oraz} \quad \psi(x) = e^{\kappa x} (\mathbb{E}[g(e^{-x}X)] - \mathbb{E}[g(e^{-x}AX)]), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie  $g$  jest funkcją hölderowską aproksymującą indyktor  $\mathbf{1}_{[1,+\infty)}(x)$ . Zdefiniujmy  $\psi_B(x) = e^{\kappa x} \mathbb{E}[g(e^{-x}B)]$ . Taka modyfikacja pozwala uniknąć technicznych trudności związanych z pokazaniem, że funkcja  $\psi_0(x) := \psi(x) - \psi_B(x)$  (por. (48)) jest d.R.i. [H4, Proposition 4.3]. Żeby znaleźć asymptotykę funkcji  $f$  dla ustalonego  $g$ , konieczne jest udowodnienie odpowiedniego twierdzenia o odnowie. Przy założeniach punktu (i) Twierdzenia 8 oraz pewnych technicznych założeniach na funkcję  $g$  udowodniono, że [H4, Theorem 3.1]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_0^{\exp(x)} L(t)/t dt} \int_{\mathbb{R}} \psi_B(x-z) H_{\mu_A}(dz) = \frac{\kappa}{m_\kappa} \int_{[1,+\infty)} g(r) r^{-\kappa-1} dr.$$

Wynik ten ideowo jest bardzo zbliżony do Twierdzenia 8, jednak bardziej techniczny.

W [H4, Theorem 4.1] znajdujemy asymptotykę  $f$  dla ustalonej funkcji  $g$ . Asymptotyka ta pozwala znaleźć asymptotykę ogona  $X$ , zob. dowód [H4, Theorem 1.1]. Poniżej prezentujemy podstawowy wynik otrzymany dla rozwiązań równania afinicznego (2).

**Twierdzenie 10** (Theorem 1.1 w [H4]).

*Założmy, że*

- (A-1)  $A \geq 0$  p.n. oraz że rozkład warunkowy  $\log(A) \mid A > 0$  jest niearytmetyczny,
- (A-2) istnieje stała  $\kappa > 0$ , dla której  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ ,  $m_\kappa := \mathbb{E}[A^\kappa \log A] < +\infty$ ,
- (B-1)  $L(x) := x^\kappa \mathbb{P}(B > x)$  jest wolnozmiennająca się oraz  $\mathbb{E}[B_+^\kappa] = +\infty$ ,
- (AB-1) istnieje stała  $\eta \in (0, \kappa) \cap (0, 1]$ , dla której  $\mathbb{E}[A^\eta B_+^{\kappa-\eta}] < +\infty$ .

*Jeśli  $X$  jest rozwiązaniem (2), to dla  $x \rightarrow +\infty$  zachodzi*

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \sim \frac{\mathbb{E}[B_+^\kappa I_{B \leq x}]}{\kappa m_\kappa} \sim \frac{1}{m_\kappa} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt. \quad (51)$$

Struktura zależności wektora  $(A, B)$  jest obecna tylko w bardzo słabym założeniu (AB-1). Ponadto, przy rozważanych założeniach, asymptotyka rozwiązania równania afinicznego (Twierdzenie 10) i maksymalnego (Twierdzenie 9) są takie same. Obserwacja ta może być po części wytłumaczona faktem, że w sumie (11) mamy do czynienia z rozkładami podwykładniczymi, dla których zachodzi tzw. zasada jednego dużego skoku (ang. *single big jump principle*). Pomimo, że składniki tej sumy są zależne, zasada ta nadal się tutaj stosuje.

Twierdzenia 9 i 10 implikują następujący wynik dla rozwiązań (1).

**Twierdzenie 11** (Theorem 1.3 w [H4]).

Założmy, że założenia (A-1), (A-2), (B-1), (AB-1) z Twierdzenia 10 są spełnione. Jeśli funkcja  $\Psi$  spełnia nierówność (43) oraz  $X$  jest rozwiązaniem (1), to zachodzi (51).

Wersja Twierdzenia 10 została również udowodniona, w sytuacji, gdy  $A$  może przyjmować wartości ujemne. Wtedy założenie (A-1) jest zastępowane przez warunek  $\mathbb{E}[|A|^\kappa] = 1$  oraz nierytmetyczności rozkładu warunkowego  $\log(|A|) \mid A \neq 0$ , a założenie (B-1) jest zmieniane na: dla  $p \in [0, 1]$  oraz  $L \in \mathcal{R}_0$  zachodzi

$$\mathbb{P}(B > x) \sim p x^{-\kappa} L(x) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B < -x) \sim (1-p)x^{-\kappa} L(x) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[|B|^\kappa] = +\infty.$$

Wtedy jeśli  $\mathbb{E}[|A|^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$  oraz  $X$  jest rozwiązaniem (2), to gdy  $x \rightarrow +\infty$  [H4, Theorem 5.2]

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \sim x^\kappa \mathbb{P}(X < -x) \sim \frac{1}{2\mathbb{E}[|A|^\kappa \log(|A|)]} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt.$$

Co zaskakujące, problem ten da się sprowadzić do sytuacji  $A \geq 0$ . Dokładniej, można pokazać, że jeśli  $X$  spełnia równanie (2) dla  $\mathbb{P}(A < 0) > 0$ , to  $X$  spełnia również równanie

$$X \stackrel{d}{=} \tilde{A}X + \tilde{B}, \quad (\tilde{A}, \tilde{B}) \text{ oraz } X \text{ są niezależne,}$$

gdzie  $\mathbb{P}(\tilde{A} \geq 0) = 1$  [54, Lemma 2.1]. Rozkład wektora losowego  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  nie jest wyznaczony jednoznacznie, ale zawsze można wziąć

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A_1 \cdots A_N, B_1 + A_1 B_2 + \dots + A_1 \cdots A_{N-1} B_N),$$

gdzie  $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : A_n \geq 0\}$  jest skończonym momentem stopu [H4, §5]. Rozkład  $\tilde{A}$  dziedziczy wiele własności z rozkładu  $A$ , w szczególności warunek  $\mathbb{E}[|A|^\kappa] = 1$  łatwo implikuje  $\mathbb{E}[\tilde{A}^\kappa] = 1$ . Żeby analizować rozkład  $\tilde{B}$ , poczyniono bardzo prostą, lecz zaskakującą i, według naszej wiedzy, nigdzie nie odnotowaną w literaturze obserwację, że

$$\tilde{B} \stackrel{d}{=} A I_{A < 0} S + B, \quad (A, B) \text{ oraz } S \text{ są niezależne,}$$

gdzie  $S$  spełnia równanie afiniczne

$$S \stackrel{d}{=} A I_{A > 0} S + B, \quad (A, B) \text{ oraz } S \text{ są niezależne.}$$

Okazuje się, że przy rozważanych założeniach stosunkowo łatwo jest badać własności rozkładu  $S$ , ponieważ asymptotykę  $S$  opisuje Twierdzenie 7.

#### Asymptotyka drugiego rzędu

Żeby udowodnić asymptotykę wyższego rzędu dla ogona  $X$  niezbędny jest nie tylko dobry opis składnika dominującego  $\int_{\mathbb{R}} \psi_B(x-z) H_{\mu_A}(dz)$ , ale również reszty, czyli składnika  $\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz)$ , przy czym podejście przez funkcje hölderowskie wydaje się tutaj być za słabe. By dokładnie opisać tę resztę rozważano warunek gwarantujący większą regularność miary odnowy  $H_{\mu_A}$ , niż ta wynikająca z dotychczas przyjętych założeń. W ramach prac znaleziono warunek, przy którym dla pewnej stałej  $c > 0$  oraz  $\beta \in (0, 1)$  zachodzi

$$H_{\mu_A}((x, x+h]) \leq c h^\beta, \quad x, h \geq 0.$$



Łatwo jest pokazać, że dla dowolnej miary  $\mu$  o dodatnim pierwszym momencie oraz dowolnej stałej  $\varepsilon > 0$  istnieje stała  $C$ , taka że  $\sup_{x \in \mathbb{R}} H_\mu((x, x+h]) \leq Ch$  dla  $h > \varepsilon$ . Jednak kluczowe były oszacowania dla małych  $h$ . Jeśli założymy, że dla pewnego  $\beta \in (0, 1)$  mamy

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \geq 0} h^{-\beta} \mathbb{P}(x < \log(A) \leq x+h) < +\infty, \quad (52)$$

to zachodzi również

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \geq 0} h^{-\beta^*} \mu_A((x, x+h]) < +\infty$$

dla pewnego  $\beta^* \in (0, \beta) \subset (0, 1)$  [H4, p. 1808]. Powyższy warunek implikuje z kolei istnienie stałej  $\tilde{\beta} \in (0, \beta^*) \subset (0, 1)$ , dla której mamy [H4, Lemma 2.1]

$$H_{\mu_A}((x, x+h]) \leq c \max\{h, h^{\tilde{\beta}}\}, \quad x, h \geq 0.$$

W [H4, Theorem 4.4] założono mocniejszy warunek niż (52), a mianowicie  $\sup_{x \geq 0}$  zostało zastąpione przez  $\sup_{x \in \mathbb{R}}$ , co było podyktowane potrzebą wynikającą z szacowań w [H4, Lemma 4.7]. Dowód zaczyna się tak samo jak w przypadku dowodu Twierdzenia 9 punkt (ii), jednak jest dużo bardziej techniczny ze względu na fakt, że analiza równania afinicznego jest trudniejsza niż równania maksymalnego. Wynik ponownie opiera się na Twierdzeniu 8 punkt (ii).

**Twierdzenie 12** (Theorem 4.4 w [H4]).

*Założmy, że*

(A-1')  $A \geq 0$  p.n. oraz że rozkład  $\mu_A$  jest silnie niekratowy,

(A-2') istnieje stała  $\kappa > 0$ , dla której  $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ ,

(A-3) istnieje stała  $\beta > 0$ , dla której

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} h^{-\beta} \mathbb{P}(x < \log(A) \leq x+h) < +\infty,$$

(A-4) istnieje stała  $\gamma > \kappa + \kappa^2/\beta$ , dla której  $\mathbb{E}[A^\gamma] < +\infty$ ,

(B-1)  $L(x) := x^\kappa \mathbb{P}(B > x)$  jest wolnozmiennająca się oraz  $\mathbb{E}[B_+^\kappa] = +\infty$ .

*Jeśli  $X$  jest rozwiązaniem (2), to dla  $x \rightarrow +\infty$  zachodzi*

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{\int_0^x L(t)/t dt}{m_\kappa} + \frac{\mathbb{E}[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa - B_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + O(L(x)) + o(1). \quad (53)$$

Zauważmy, że założenia (A-2') oraz (A-4) implikują (A-2), a założenia (A-2') oraz (B-1) implikują (AB-1).

Zauważmy ponadto, że (53) bardzo przypomina tezę punktu (ii) Twierdzenia 9. Poniżej wytłumaczymy skąd biorą się różnice w opisie reszty w obu tych twierdzeniach. W dowodzie Twierdzenia 9 punkt (ii) wykazano, że gdy  $X$  jest rozwiązaniem równania maksymalnego, to dla  $\psi_0(x) = e^{\kappa x} (\mathbb{P}(X > e^x) - \mathbb{P}(AX > e^x) - \mathbb{P}(B > e^x))$  zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz) = -\frac{\mathbb{E}[\min\{AX, B\}_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + o(L(e^x)).$$

Gdy  $X$  jest rozwiązaniem równania afinicznego to w dowodzie Twierdzenia 12 pokazano jedynie, że

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz) = \frac{\mathbb{E}[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa - B_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + o(1),$$

gdzie w ogólności nie wiadomo czy reszta  $o(1)$  jest rzędu  $o(L(e^x))$ .

Przypomnijmy, że przy (B-1) mamy  $\int_0^x L(t)/t dt \rightarrow +\infty$ . Jeśli  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} L(x) > 0$ , to (53) implikuje

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{\int_0^x L(t)/t dt}{m_\kappa} + O(L(x)).$$

Jeśli z kolei  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$ , to (53) sprowadza się do

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^\kappa \mathbb{P}(X > x) - \frac{\int_0^x L(t)/t dt}{m_\kappa} \right) = \frac{\mathbb{E}[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa - B_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa}.$$

#### 4.3.7 Praca [H5]

Prace [H1]-[H4] dotyczyły badania asymptotyki ogona rozwiązania równań (1) w  $+\infty$ . Nośniki tych rozwiązań mogą być jednak ograniczone i zasadne jest wtedy pytanie o asymptotykę ogona przy brzegu tego nośnika. Uzasadnimy najpierw, że problem znalezienia asymptotyki przy skończonym brzegu nośnika (lewym lub prawym), w przypadku równania afinicznego może być zawsze sprowadzony do badania lewego ogona w  $0^+$ . Niech  $X$  będzie rozwiązaniem (2), dla którego  $x_0 := \text{ess sup}(X) < +\infty$  oraz powiedzmy, że jesteśmy zainteresowani asymptotyką ogona przy prawym końcu nośnika, tzn. funkcji  $\mathbb{P}(X > x)$  dla  $x \rightarrow x_0^-$ . Problem ten jest równoważny badaniu asymptotyki funkcji  $x \mapsto \mathbb{P}(\tilde{X} < x)$  dla  $x \rightarrow 0^+$ , gdy  $\tilde{X} := x_0 - X$ . Rzeczywiście, w tej sytuacji jasne jest, że zmienna losowa  $\tilde{X}$  jest nieujemna p.n. oraz spełnia równanie afiniczne

$$\tilde{X} \stackrel{d}{=} A\tilde{X} + \tilde{B}, \quad (A, \tilde{B}) \text{ oraz } \tilde{X} \text{ są niezależne,}$$

gdzie  $\tilde{B} := x_0(1-A) - B$ . Jeśli  $x_1 := \text{ess inf}(X) > -\infty$  i jesteśmy zainteresowani lewym ogonem  $X$  przy  $x_1^+$ , to łatwo zauważyć, że zmienna losowa  $\hat{X} := X - x_1$  jest nieujemna p.n. oraz również spełnia równanie afiniczne. Zauważmy ponadto, że jeśli zmienne losowe  $A$  i  $B$  są nieujemne p.n., to zmienna losowa  $X$  spełniająca (2) również jest nieujemna p.n. (11). Zaczniemy od szeregu definicji.

Niech  $\mathcal{R}_0(0^+)$  będzie klasą funkcji wolnozmiennających się w  $0^+$ , tzn. nieujemnych funkcji mierzalnych zdefiniowanych w otoczeniu  $0^+$ , spełniających  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(tx)/L(x) = 1$  dla dowolnego  $t > 0$ . Jasne jest, że jeśli  $L \in \mathcal{R}_0$ , to  $x \mapsto L(1/x) \in \mathcal{R}_0(0^+)$ . Powiemy, że zmienna losowa  $B$  jest *IED* (tzn. posiada *Inverse Exponential Decay*), jeśli dla  $\lambda \geq 0$  i  $\rho > 0$  oraz funkcji  $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$  zachodzi

$$\mathbb{P}(B < x) = e^{-\frac{\lambda + o(1)}{x^\rho L(x)}}, \quad x \rightarrow 0^+. \quad (54)$$

Takie zmienne losowe oznaczamy przez  $\text{IED}_L^\rho(\lambda)$ . Pierwszą istotną obserwacją w pracy [H5] jest spostrzeżenie, że jeśli  $X_i$  jest  $\text{IED}_L^\rho(\lambda_i)$  dla  $i = 1, 2$  oraz  $X_1$  i  $X_2$  są niezależne, to [Theorem 3.10, H5]

$$X_1 + X_2 \text{ jest } \text{IED}_L^\rho \left( \left( \lambda_1^{1/(1+\rho)} + \lambda_2^{1/(1+\rho)} \right)^{1+\rho} \right).$$

Dowód tego faktu opiera się na tauberowskim Twierdzeniu de Bruijna. Powyższy wynik przy dodatkowych założeniach został następnie w pracy uogólniony na nieskończone sumy (Sekcja 4), procesy ARMA o stałych współczynnikach (Sekcje 5 i 6) oraz rozwiązania równań afinicznych (Sekcja 7). Ograniczymy się tutaj do prezentacji wyników z Sekcji 7, ponieważ jest to sekcja bezpośrednio powiązana z problemem będącym główną motywacją pracy (o którym dalej), a także najciekawsza matematycznie.

Przypomnijmy, że zmienne losowe  $A$  i  $B$  są dodatnio kwadrantowo zależne (PQD), jeśli

$$\mathbb{P}(A > x, B > y) \geq \mathbb{P}(A > x)\mathbb{P}(B > y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Twierdzenie 13** (Theorem 7.6 w [H5]).

*Założmy, że (8) jest spełnione,  $A$  i  $B$  są nieujemne oraz dodatnio kwadrantowo zależne. Jeśli*

$$B \text{ jest IED}_L^\rho(\lambda), \tag{55}$$

*dla  $\rho > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  i  $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$  oraz  $X$  jest rozwiązaniem (2), to*

$$X \text{ jest IED}_L^\rho(\Lambda),$$

*dla*

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\left(1 - a_-^{\rho/(1+\rho)}\right)^{1+\rho}}, \tag{56}$$

*gdzie  $a_- := \text{ess inf}(A)$ .*

Dowód powyższego twierdzenia jest stosunkowo podobny do dowodu punktów (i) i (ii) Twierdzenia 2 z pracy [H2]. Opiera się on na analizie asymptotyki transformaty Laplace'a  $X$  i odpowiednim twierdzeniu tauberowskim. Zdefiniujmy

$$\psi_X(z) := -\log \mathbb{E}[\exp(-zX)] \quad \text{i} \quad \psi_B(z) := -\log \mathbb{E}[\exp(-zB)].$$

Wtedy z (10) mamy dla  $z > 0$

$$\begin{aligned} e^{-\psi_X(z)} &= \mathbb{E}[e^{-zX}] = \mathbb{E}[e^{-z(A+B)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-z(A+B)} \mid A, B]] \\ &= \mathbb{E}[e^{-zB} \mathbb{E}[e^{-zA} \mid A, B]] = \mathbb{E}[e^{-\psi_X(zA) - zB}], \end{aligned} \tag{57}$$

gdzie skorzystano z niezależności  $X$  i  $(A, B)$ .

Przy założeniu (55) asymptotyka funkcji  $\psi_B$  wynika z tauberowskiego twierdzenia de Bruijna. Można z niego wywnioskować, że nieujemna zmienna losowa  $B$  jest IED $_L^\rho$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\psi_B(z) \sim (f^*)^\leftarrow(z), \quad z \rightarrow +\infty, \tag{58}$$

gdzie  $f(x) = \lambda x^{\rho+1}/L(1/x)$ ,  $f^*$  jest wypukłym sprzężeniem funkcji  $f$  oraz  $g := (f^*)^\leftarrow$  jest dowolną funkcją spełniającą  $f^*(g(x)) \sim x \sim g(f^*(x))$ , gdy  $x \rightarrow \infty$ .<sup>3</sup>

Głównym krokiem w dowodzie Twierdzenia 13 jest pokazanie, że (57) oraz (58) implikują

$$\psi_X(z) \sim \frac{1}{1 - a_-^{\rho/(1+\rho)}} \psi_B(z) \sim \frac{1}{1 - a_-^{\rho/(1+\rho)}} (f^*)^\leftarrow(z), \quad z \rightarrow +\infty.$$

<sup>3</sup>Prezentujemy tutaj sformułowanie twierdzenia de Bruijna z [H2, Theorem 2.4].

Mając powyższą asymptotyczną równoważność, możemy zastosować odwrotną implikację twierdzenia de Bruijna by otrzymać tezę twierdzenia.

Drugi z ważnych wyników pracy [H5] dotyczy twierdzenia o dolnej obwiedni ciągu  $(X_n)_{n \geq 0}$  zdefiniowanego w (4).

**Twierdzenie 14** (Theorem 7.8 w [H5]).

Założmy, że  $A$  i  $B$  są dodatnio kwadrantowo zależne,  $\mathbb{P}(A \in [0, \beta]) = 1$  dla pewnego  $\beta \in (0, 1)$  oraz  $\mathbb{E}[\max\{\log(B), 0\}^s] < +\infty$  dla każdego  $s > 0$ . Jeśli  $B$  jest  $\text{IED}_L^\rho(\lambda)$  dla  $\rho > 0$ ,  $\lambda \geq 0$  oraz  $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$ , to dla ciągu  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zdefiniowanego w (4) dla  $X_0 = 0$  mamy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{g(1/\log(n))} = \Lambda^{1/\rho} \quad \text{p.n.},$$

gdzie  $\Lambda$  jest zdefiniowana w (56), a  $g$  jest funkcją asymptotycznie odwrotną do funkcji  $x \mapsto x^\rho L(x)$ .

Dowód Twierdzenia 14 korzysta z opisu ogona rozkładu stacjonarnego ciągu  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , zob. (12), otrzymanego w Twierdzeniu 13. Dla  $c > 0$  zdefiniujemy ciąg zdarzeń  $(A_n(c))_{n \in \mathbb{N}}$  wzorem

$$A_n(c) := \left\{ \frac{X_n}{g(1/\log(n))} \leq c \Lambda^{1/\rho} \right\}$$

Korzystając z Lematów Borela-Cantellego pokazano, że z prawdopodobieństwem 1 dla dowolnego  $c \in (0, 1)$  zdarzenia  $(A_n(c))_{n \in \mathbb{N}}$  zachodzą skończenie wiele razy, a dla  $c > 1$  zachodzą nieskończenie wiele razy.

Główną motywacją do powyższych badań były prace nad procesami stochastycznymi typu Fleminga-Viota [15]. Okazuje się, że procesy tego typu, blisko związane z procesami gałązkowymi, czasami mogą być opisane teorią równań afinicznych. Następujący proces jest właśnie takim przykładem: rozważmy dwie cząstki w  $\mathbb{R}_+^1$  poruszające się zgodnie z niezależnymi ruchami Browna startującymi z tego samego punktu w  $(0, \infty)$ ; w momencie, gdy jedna z cząstek uderzy w 0, zostaje zabita, a druga cząstka rozdziela się na dwie cząstki, poruszające się dalej zgodnie z niezależnymi ruchami Browna; ten schemat jest powtarzany. Niech  $T_n$  będzie  $n$ -tym momentem uderzenia cząstki w 0, a  $Y_n$  położeniem dalszej cząstki w momencie  $T_n$ . Można wtedy pokazać bezpośrednim rachunkiem, że ciąg  $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadany wzorem dla  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n = \frac{Y_{n-1}^2}{Y_n^2}, \quad B_n = \frac{T_n - T_{n-1}}{Y_n^2}, \quad Y_0 = 1, \quad T_0 = 0$$

jest ciągiem i.i.d., a dla  $X_n = T_n/Y_n^2$  w sposób trywialny zachodzi (4) z  $X_0 = 0$ , zob. [16, §7]. Podkreślmy, że rozkład wektora  $(A, B)$  dla tego szczególnego procesu nie spełnia założeń Twierdzeń 13 i 14. Twierdzenia których założenia obejmują ten przypadek zawarte są w pracy [16], będącej kontynuacją [H5].

Wedle naszej wiedzy, Twierdzenie 14 jest pierwszym tego typu wynikiem otrzymanym dla ciągu  $(X_n)_{n \geq 0}$  i otwiera ono drogę do wielu nowych hipotez. W szczególności, przy założeniach na  $(A, B)$  rozważanych w pracach [H1] i [H2] powinno być możliwe znalezienie jawnej funkcji  $g$  oraz stałej  $C$ , dla których

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{g(n)} = C \in (0, \infty) \quad \text{p.n.}$$

#### 4.4 Opis wkładu habilitanta w osiągnięciu naukowe

Prace [H1] i [H2] są samodzielne.

Praca [H3]:

- Zarówno sformułowania jak i dowody głównych technicznych wyników pracy, czyli twierdzeń o odnowie Theorem 3.1 i Theorem 3.3 stanowią indywidualny wkład habilitanta.
- Dowód punktu (i) Theorem 4.2 został przeprowadzony wspólnie z prof. E. Damek przy porównywalnym wkładzie autorów.
- Sformułowanie oraz dowód asymptotyki drugiego rzędu, czyli punktu (ii) Theorem 4.2, są samodzielnym dziełem habilitanta.
- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H4]:

- Podstawowy wynik dotyczący równania afinicznego, czyli Theorem 1.1 (wraz ze standardowymi konsekwencjami Corollary 1.2, Theorem 1.3 i Theorem 1.4), jest wspólny, a wkład współautorów w jego powstanie jest porównywalny. Zastosowanie funkcji hölderowskich w dowodzie Theorem 1.1 (idea zaczerpnięta z [11]) pochodzi od prof. E. Damek.
- Sformułowanie twierdzenia o odnowie Theorem 3.1 i jego dowód są zasadniczo dziełem habilitanta. Prof. E. Damek miała wkład w pokazanie, że drugi składnik równania (58) szacuje się przez (59).
- Do wkładu habilitanta należy również wypracowanie założenia na rozkład  $A$  prowadzącego do wyższej regularności miary odnowy  $H_{\mu_A}$  (Lemma 2.1), co pozwoliło na wykonywanie szacowań w Theorem 4.4 i Lemma 4.7.
- Sekcja 5 o znakowanym  $A$  (w tym sformułowania i dowody Theorem 5.2, Theorem 5.3, oraz Theorem 5.4) jest efektem samodzielnej pracy habilitanta.
- Sformułowanie i dowód Twierdzenia o asymptotyce drugiego rzędu Theorem 4.4 (a także sformułowanie i dowód wyniku pomocniczego, czyli Lemma 4.7) zostały wypracowane przez habilitanta. Prof. E. Damek miała wkład w szacowania na stronach 1809-1810.
- Sformułowania i dowody Proposition 4.3 oraz Lemma 7.1 są autorstwa prof. E. Damek.
- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H5]:

- Głównym wkładem habilitanta jest zauważenie, że wszystkie wyniki w pracy mogą być rozważane przy ogólniejszych założeniach. Zanim habilitant dołączył do projektu, Definition 1.1 oraz cała praca dotyczyły tylko sytuacji  $\rho = 1$  oraz  $L = 1$ . Uogólnienie na sytuację  $\rho > 0$  oraz  $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$  spowodowało przeformułowanie wszystkich wyników w pracy z wyłączeniem Sekcji 8, która dotyczy konkretnego przykładu. Kluczowe spostrzeżenie jest zawarte w sformułowaniu Theorem 3.10, które mówi, że klasa  $\text{IED}_L^\rho$  jest

zamknięta ze względu na operację splotu. Obserwacja ta jest w pracy następnie rozszerzana na nieskończone sumy (Theorem 4.4 i Theorem 4.7), procesy ARMA (Theorem 6.2 i Theorem 6.3 ) oraz rozwiązania równań afinicznych (Theorem 7.6). Dodatkowo, wyniki te są wykorzystywane do udowodnienia twierdzeń typu prawo iterowanego logarytmu (Theorem 6.3 dla procesów ARMA oraz Theorem 7.8 dla ciągu (4)).

- Obecne dowody Theorem 3.10 oraz Theorem 7.6 pochodzą w pełni od habilitanta. Dzięki wykorzystaniu tuberowskiego Twierdzenia de Bruijna, dowody te są znacznie krótsze niż wcześniejsze i to pomimo faktu, że dotyczą ogólniejszej sytuacji.
- W przypadku równań afinicznych (Sekcja 7) habilitant zauważył, że założenie o niezależności  $A$  i  $B$  może zostać osłabione do dodatniej kwadrantowej zależności.
- Zdecydowana większość pracy redakcyjnej została wykonana przez dr. T. Tadicia. Prof. K. Burdzy sprawował opiekę merytoryczną nad projektem.

## 5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

### 5.1 Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora.

Wszystkie publikacje habilitanta wydrukowane przed doktoratem wchodziły w skład rozprawy doktorskiej. Tematycznie można je podzielić na dwa nurty:

- Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych - [P1], [P3], [P4],
- Równania funkcyjne na stożkach symetrycznych - [P2], [P5].

[P1] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones through Gleason's theorem. *Studia Math.* 217 (2013), no. 1, 1–17.

[P2] B. Kołodziejek, Multiplicative Cauchy functional equation on symmetric cones. *Aequ. Math.* 89 (2015), no. 4, 1075–1094.

[P3] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones without invariance of the "quotient". *J. Theor. Probab.* 29 (2016), no. 2, 550–568.

[P4] B. Kołodziejek, Characterization of beta distribution on symmetric cones. *J. Multivar. Anal.* 143 (2016), 414–423.

[P5] B. Kołodziejek, The generalized fundamental equation of information on symmetric cones. *Aequ. Math.* 90 (2016), no. 5, 917–933.

Problem charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa może być zdefiniowany następująco. Powiedzmy, że pewna rodzina  $\mathcal{F}$  rozkładów prawdopodobieństwa posiada pewną własność  $\mathcal{P}$ . Powiemy, że własność  $\mathcal{P}$  charakteryzuje rodzinę  $\mathcal{F}$  wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłady posiadające własność  $\mathcal{P}$  należą do rodziny  $\mathcal{F}$ . Niezależnościowe charakteryzacje dotyczą własności określonych przez warunek niezależności przekształceń niezależnych zmiennych losowych: rozważmy niezależne zmienne losowe  $(X, Y)$ , bijekcję  $\psi$  działającą na nośniku wektora  $(X, Y)$  oraz zdefiniujmy wektor losowy  $(U, V) = \psi(X, Y)$ . Powiemy, że  $(X, Y)$  spełnia własność niezależności  $\mathcal{P}$ , jeśli zmienne losowe  $U$  i  $V$  są niezależne.

Charakteryzacje niezależnościowe mają stosunkowo długą historię. Do najbardziej znanych charakteryzacji niezależnościowych należy charakteryzacja (Kaca-)Bernsteina rozkładu normalnego [40, 5]: *jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależne i niezdegenerowane, to składowe wektora  $(U, V) = (X + Y, X - Y)$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  i  $Y$  mają rozkład normalny o tej samej wariancji*. Innym przykładem znanej charakteryzacji jest charakteryzacja Lukacsa: *jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależne, nieujemne i niezdegenerowane, to składowe wektora  $(U, V) = (X + Y, X/(X + Y))$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  i  $Y$  mają rozkłady gamma o tym samym parametrze skali*. Charakteryzacja Lukacsa została uogólniona na zmienne losowe o wartościach w stożku macierzy dodatnio określonych  $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$  przez Olkina i Rubina w pracy [48], gdzie charakteryzowano uogólnienie rozkładu gamma na  $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$ , tzw. rozkład Wisharta. Zauważmy, że istnieje wiele możliwości zdefiniowania analogu ilorazu macierzy (jako działania wewnętrznego w  $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$ ). Mierzalne przekształcenie  $\mathfrak{g}: \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}) \mapsto \text{GL}(r; \mathbb{R})$ , spełniające warunek  $\mathfrak{g}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathfrak{g}_{\mathbf{x}}^{\top} = I_r$  dla dowolnego  $\mathbf{x} \in \text{Sym}(r; \mathbb{R})$ , nazywamy *algorytmem dzielenia*. Podstawowymi przykładami algorytmów dzielenia są  $\mathfrak{g}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{-1/2}$  oraz  $\mathfrak{g}_{\mathbf{x}} = t_{\mathbf{x}}^{-1}$ , gdzie  $t_{\mathbf{x}}$  jest macierzą dolną trójkątną z rozkładu Choleskiego macierzy  $\mathbf{x} = t_{\mathbf{x}} \cdot t_{\mathbf{x}}^{\top}$ .

Bijekcja określona na  $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R}) \times \text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$ , uogólniająca przekształcenie Lukacsa została zdefiniowana wzorem

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{g}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^\top) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (59)$$

Olkin i Rubin w swojej pracy zakładali dodatkowo, że rozkład „ilorazu”  $\mathbf{v}$  jest niezmienniczy na obroty, tzn. dla dowolnej macierzy ortogonalnej  $\mathbf{o}$  zachodzi  $\mathbf{v} \stackrel{d}{=} \mathbf{o} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{o}^\top$ . Wynik ten został później rozszerzony na tzw. stożki symetryczne przez Casalis i Letaka [18]. Stożki symetryczne stanowią naturalne uogólnienie stożka macierzy symetrycznych dodatnio określonych  $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$  [25].

Bobecka i Wesołowski rozważali przekształcenie (59) dla  $\mathbf{g}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{-1/2}$  oraz pokazali, że założenie o niezmienniczości ilorazu nie jest potrzebne do charakteryzacji rozkładu Wisharta [9]. Ich dowód opierał się na rozwiązaniu powiązanego z problemem równania funkcyjnego na nieznaną gęstość. Zakładali oni jednak dużą regularność nieznaną gęstość. W pracy [P1] istotnie osłabiłem te założenia regularnościowe, a w pracy [P3] rozważałem przekształcenie (59) dla dowolnego algorytmu dzielenia  $\mathbf{g}$  oraz udowodniłem, że własność niezależności  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  charakteryzuje uogólnione rozkłady Wisharta, tzw. rozkłady  $\mathbf{w}$ -Wisharta, gdzie  $\mathbf{w}_{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_{\mathbf{x}}^{-1}$  jest tzw. algorytmem mnożenia. Prace te zostały dostrzeżone przez Olkina, „*Fifty years later, Ingram was delighted to see a resurgence of interest in this result, which has been extended to random positive definite matrices with generalized Wishart and Riesz distributions on symmetric cones (Jordan algebras) (e.g. [P3]) and homogeneous cones*” [34].

Gęstość rozkładów  $\mathbf{w}$ -Wisharta jest opisywana przez tzw. funkcje  $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego, które rozważałem w [P2]. Są to funkcje spełniające następujące równanie funkcyjne

$$f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}).$$

Jasne jest, że  $f(\mathbf{x}) = \det(x)^\alpha$  jest funkcją  $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego dla dowolnego algorytmu mnożenia  $\mathbf{w}$ , ale dla szczególnych  $\mathbf{w}$  (np. dla macierzy dolnej trójkątnej z rozkładu Choleskiego) funkcję  $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego mogą przyjmować inną, ogólniejszą postać. Przedstawione w pracy rozważania są w pełni ogólne i nie wymagają żadnych założeń regularnościowych na nieznaną funkcję.

W pracy [51] udowodniono następującą charakteryzację rozkładu beta: *Jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależnymi, niezdegenerowanymi zmiennymi losowymi o wartościach w  $(0, 1)$ , to zmienne losowe  $U = 1 - XY$  oraz  $V = (1 - X)/(1 - XY)$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  i  $Y$  mają rozkład beta z odpowiednimi parametrami.* Prace [P4] i [P5] dotyczą uogólnienia tej charakteryzacji na rozkłady o nośnikach w stożku macierzowym lub ogólniej, stożku symetrycznym. Niech  $\mathcal{D} = \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}) \cap (I - \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}))$  będzie odpowiednikiem przedziału  $(0, 1)$  w stożku  $\text{Sym}(r; \mathbb{R})$ . Rozważmy bijekcję  $\psi: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$  zadaną przez

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( I - \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top, \tilde{g}_{I - \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top} \cdot (I - \mathbf{x}) \cdot \tilde{g}_{I - \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top}^\top \right),$$

gdzie  $\mathbf{w}$  jest pewnym algorytmem mnożenia,  $\mathbf{g}$  jest pewnym algorytmem dzielenia, a  $I$  jest macierzą identycznościową. Jak pokazano w [P4], przy założeniu istnienia ciągłych gęstości niezależnych, niezdegenerowanych zmiennych losowych  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{Y}$  o wartościach w  $\mathcal{D}$ , niezależność składowych wektora  $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  charakteryzuje pewne uogólnione rozkłady beta. Gdy nic nie założymy o postaci algorytmów mnożenia i dzielenia, to gęstości tych rozkładów, podobnie jak w przypadku rozkładów  $\mathbf{w}$ -Wisharta, zadane są przez funkcje  $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego rozważane w pracy [P2]. Charakteryzacja przedstawiona w pracy [P4] w dużej mierze opiera się



na wynikach pracy [P5], gdzie rozważano uogólnienia fundamentalnego równania informacji, czyli znaleziono ogólną postać ciągłych funkcji  $f, g, h, k: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniających

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{g}_{I-\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_{I-\mathbf{x}}^\top) = h(\mathbf{y}) + k(\tilde{\mathbf{g}}_{I-\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_{I-\mathbf{x}}^\top)$$

dla  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}^2: \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{D}\}$ , gdzie  $\mathbf{g}$  i  $\tilde{\mathbf{g}}$  są dwoma algorytmami dzielenia spełniającymi pewne warunki regularnościowe.

## 5.2 Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora spoza rozprawy habilitacyjnej.

Publikacje po doktoracie, które nie weszły w skład rozprawy habilitacyjnej, można podzielić na następujące trzy nurty tematyczne:

- a) Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych.
  - b) Naturalne rodziny wykładnicze oraz rozkład Wisharta na stożkach jednorodnych.
  - c) Teoria odnowy.
- a) *Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych.*

- [R1] B. Kołodziejek, The Matsumoto-Yor property and its converse on symmetric cones. *J. Theor. Probab.* 30 (2017), no. 2, 624–638.
- [R2] B. Kołodziejek, A Matsumoto-Yor characterization for Kummer and Wishart random matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018), no. 2, 976–986.
- [R3] B. Kołodziejek, A. Piliszek, Independence characterization for Wishart and Kummer random matrices, *REVSTAT-Stat. J.* 18(3) (2020), 357–373.

Powyższy ciąg prac jest kontynuacją tematyki z doktoratu, czyli niezależnościowych charakteryzacji na stożkach macierzowych i ogólniej, stożkach symetrycznych. Otrzymane wyniki stanowią uogólnienia [45]. W kolejnych pracach rozważano następujące przekształcenia zachowujące niezależność charakteryzowanych rozkładów (praca [R1] dotyczyła charakteryzacji rozkładu Wisharta oraz macierzowego rozkładu GIG), a prace [R2] i [R3] dwóch niepowiązanych bezpośrednio ze sobą charakteryzacji rozkładów Wisharta oraz macierzowego rozkładu Kummera):

$$\begin{aligned} \psi_{[R1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}^{-1} - (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{-1}), \\ \psi_{[R2]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left( \mathbf{x} + \mathbf{y}, (I + (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{-1})^{1/2} \cdot (I + \mathbf{x}^{-1})^{-1} \cdot (I + (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{-1})^{1/2} \right), \\ \psi_{[R3]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left( (I + \mathbf{x})^{-1/2} \cdot \mathbf{y} \cdot (I + \mathbf{x})^{-1/2}, \right. \\ &\quad \left. \left( I + (I + \mathbf{x})^{-1/2} \cdot \mathbf{y} \cdot (I + \mathbf{x})^{-1/2} \right)^{1/2} \cdot \mathbf{x} \cdot \left( I + (I + \mathbf{x})^{-1/2} \cdot \mathbf{y} \cdot (I + \mathbf{x})^{-1/2} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Wspólnym i jedynym technicznym założeniem prac [R1]-[R3] jest istnienie ciągłych gęstości charakteryzowanych rozkładów.

b) *Naturalne rodziny wykładnicze oraz rozkład Wisharta na stożkach jednorodnych.*

[R4] H. Ishi, B. Kołodziejek, Characterization of the Riesz Exponential Family on homogeneous cones, *Colloq. Math.* 158(1) (2019), 45–57.

[R5] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, Wishart laws and variance function on homogeneous cones, *Probab. Math. Stat.* 39(2) (2019), 337–360.

[R6] M. Piccioni, B. Kołodziejek, G. Letac, Location and scale behaviour of the quantiles of a natural exponential family, *ESAIM-Prob. Stat.* 24 (2020), 244–251.

Niech  $V$  będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech  $\Omega$  będzie wypukłym, regularnie otwartym (tzn.  $\Omega = \text{Int } \overline{\Omega}$ ) zbiorem w  $V$  niezawierającym prostej. Powiemy, że  $\Omega$  jest *stożkiem jednorodnym* w  $V$ , jeśli liniowa grupa automorfizmów  $G(\Omega) = \{g \in \text{GL}(V) : g\Omega = \Omega\}$  działa tranzytywnie na  $\Omega$ , tzn. gdy dla dowolnych  $x, y \in \Omega$  istnieje  $g \in G(\Omega)$ , taka że  $y = gx$ . Z jednej strony stożki jednorodne są bardzo eleganckim i abstrakcyjnym obiektem. Z drugiej strony, dzięki reprezentacji Ishiego [38], na stożki jednorodne można patrzeć jak na konkretne rodziny macierzy symetrycznych.

Letac w swojej pracy [47] scharakteryzował rodzinę rozkładów Wisharta na  $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$  jako jedyną naturalną rodzinę wykładniczą na  $\text{Sym}(r; \mathbb{R})$  niezmienniczą ze względu na działanie  $x \mapsto a \cdot x \cdot a^\top$  dla  $a \in \text{GL}(r; \mathbb{R})$ . Jak zauważył Letac w [47], naturalną strukturą, na której można rozważać tego typu charakteryzacje, są właśnie stożki jednorodne. W [R4] udowodniono, że miara Riesza może zostać scharakteryzowana jako miara generująca naturalną rodzinę wykładniczą, która jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy trójkątnej, tzn. przekształcenia  $x \mapsto t \cdot x \cdot t^\top$ , gdzie  $t$  pochodzi z grupy trójkątnej.

Wiadomo, że funkcja wariancji naturalnej rodziny wykładniczej, charakteryzuje tę rodzinę jednoznacznie. W pracy [R5] rozważano naturalną rodzinę wykładniczą scharakteryzowaną przez własność niezmienniczości w pracy [R4] oraz znaleziono postać jej funkcji wariancji. Uogólniono w ten sposób wyniki [33] ze stożków symetrycznych na stożki jednorodne. W dowodach korzystano z reprezentacji macierzowej stożków jednorodnych [38].

Praca [R6] dotyczy charakteryzacji rodzin wykładniczych, jednak nie jest powiązana bezpośrednio z [R4] i [R5]. Rozważano w niej naturalne rodziny wykładnicze na  $\mathbb{R}$ . Scharakteryzowano rodzinę rozkładów normalnych oraz gamma przez zachowanie kwantyla odpowiednich rozkładów. Załóżmy, że  $F = \{P_t : t \in T\}$  będzie naturalną rodziną wykładniczą, gdzie  $P_t(dx) = e^{tx} P_0(dx) / \int_{\mathbb{R}} e^{ty} P_0(dy)$ . Przyjmijmy, że dla  $\alpha \in (0, 1)$  funkcja  $f_\alpha$  spełnia

$$P_t((-\infty, f_\alpha(t))) \leq \alpha \leq P_t((-\infty, f_\alpha(t))), \quad \forall t \in T.$$

Innymi słowy,  $f_\alpha(t)$  jest kwantylem rzędu  $\alpha$  rozkładu prawdopodobieństwa  $P_t$ . Hipoteza badawcza była następująca: *znajomość funkcji  $f_\alpha$  dla ustalonego  $\alpha \in (0, 1)$  charakteryzuje jednoznacznie rodzinę  $F$* . Udało się udowodnić powyższą hipotezę w dwóch szczególnych przypadkach: gdy funkcja  $f_\alpha(t) = t$  dla  $t \in T = \mathbb{R}$  oraz gdy  $f_\alpha(t) = t^{-1}$  dla  $t \in T = (0, \infty)$ . W pierwszym z tych dwóch przypadków charakteryzowana jest rodzina rozkładów normalnych, a w drugim rodzina rozkładów gamma. Dowody obu tych przypadków opierają się na równaniu Choquet-Deny.

c) *Teoria odnowy.*

[R7] B. Kołodziejek, The left tail of renewal measure. *Stat. Probab. Lett.* 129 (2017), 306–310.

Przypomnijmy, że jeśli  $\mu$  jest miarą probabilistyczną, to jej miarą odnowy nazywamy nieograniczoną miarę  $H_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}$ . Fundamentalnym wynikiem w teorii odnowy jest Twierdzenie Blackwella (47). Wiadomo, że jeśli  $m_\mu := \int_{\mathbb{R}} t \mu(dt) > 0$  oraz  $\int_{(-\infty, 0]} t^2 \mu(dt) < \infty$ , to  $H_\mu((-\infty, x)) < \infty$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  [42]. W tej sytuacji  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_\mu((-\infty, -x)) = 0$ . Przedmiotem badań [R7] była asymptotyka lewego ogona  $H_\mu$ , tzn. funkcji  $x \mapsto H_\mu((-\infty, -x))$  gdy  $x \rightarrow +\infty$ . Dowody dotychczasowych wyników były przeprowadzane metodami analitycznymi [52, 17]. Wyniki otrzymane w [R7] opierają się na zamianie miary, którą przedstawimy poniżej. Rozważmy sytuację, gdy  $\mu((-\infty, 0)) > 0$  oraz funkcja  $g(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t} \mu(dt)$  jest skończona dla pewnego  $\theta > 0$ . Zdefiniujmy

$$\kappa = \sup\{\theta > 0: g(\theta) < 1\} \quad \text{oraz} \quad \rho = g(\kappa). \quad (60)$$

Zdefiniujmy miarę borelowską  $\nu$  wzorem  $\nu(B) = \frac{1}{\rho} \int_B e^{-\kappa t} \mu(dt)$  dla borelowskich  $B$ . Przy założeniu (60),  $\nu$  jest miarą probabilistyczną o ściśle dodatnim pierwszym momencie. Korzystając z faktu, że  $\mu^{*n}(B) = \rho^n \int_B e^{-\kappa t} \nu^{*n}(dt)$ , otrzymujemy dla  $x > 0$ ,

$$H_\mu((-\infty, -x)) = \int_{(x, \infty)} e^{-\kappa t} H_\nu^{(\rho)}(dt) = \kappa e^{-\kappa x} \int_0^\infty e^{-\kappa h} H_\nu^{(\rho)}((x, x+h]) dh,$$

gdzie  $H_\nu^{(\rho)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \nu^{*n}$ . Jeśli  $\rho = 1$ , to  $H_\nu^{(\rho)} = H_\nu$  jest miarą odnowy dla  $\nu$ . Powyższa równość oznacza, że asymptotyka lewego ogona  $H_\mu$  może zostać opisana przez twierdzenie typu Blackwella dla innej miary odnowy.

**6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.**

Habilitant odbył następujące staże w zagranicznych i krajowych ośrodkach akademickich:

- a) 04-14.IV.2019 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- b) 09-17.II.2019 - York University, Toronto, Kanada, współpraca z prof. H. Massam,
- c) 17.III-10.IV.2017 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- d) 26-30.IX.2016 - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, współpraca z prof. E. Damek,
- e) 15-22.VII.2016 - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, współpraca z prof. E. Damek,
- f) 25-30.III.2016 - University of Angers, Angers, Francja, współpraca z prof. P. Graczykiem,
- g) 05-15.VII.2015 - University of Angers, Angers, Francja, współpraca z prof. P. Graczykiem,
- h) 08-15.XI.2015 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- i) 07-10.XII.2009 - Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Niemcy, *Visiting Scientist*.

Wyjazdy a)-h) miały charakter wyjazdów w ramach współpracy naukowej. Efektem tych wyjazdów są współautorskie prace naukowe:

- Manuskrypt [30] (obecnie w recenzji) o problemie selekcji modelu w klasie gaussowskich modeli grafowych niezmienniczych na działanie grupy permutacji - wyjazdy a) i b),
- Prace [H3] i [H4] - wyjazdy d) i e),
- Praca [R4] - wyjazd h),
- Praca [R5] - wyjazdy c), f) oraz g).

Współpraca z prof. Ishim oraz prof. Graczykiem ma już charakter współpracy stałej. Obecnie pracujemy nad kontynuacją badań rozpoczętych w [30]. Ponadto, wraz z prof. Graczykiem oraz prof. M. Bogdan pracujemy nad powiązaniem metody SLOPE z kolorowymi modelami grafowymi.

## 7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

### 7.1 Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną.

- a) 2021 - Nagroda indywidualna II stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2019/20,
- b) 2019 - Nagroda indywidualna I stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2017/18,
- c) 2017 - Nagroda indywidualna I stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2015/16,
- d) 2015 - Nagroda indywidualna III stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w roku 2014 (za wyróżnioną rozprawę doktorską),
- e) 2013 - Stypendium w ramach programu Marszałka Województwa Mazowieckiego „Rozwój nauki - rozwojem regionu” (za innowacyjne badania naukowe w obszarach uznanych za szczególnie istotne dla rozwoju województwa mazowieckiego),
- f) 2011 - Druga nagroda w *XLIV Konkursie na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki*, Wrocław,
- g) 2010 - stypendium FIATa za najlepszą pracę dyplomową na Politechnice Warszawskiej, Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej.

### 7.2 Doświadczenie dydaktyczne.

- Prowadzone wykłady: *Rachunek prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej, Probabilistyka dla aktuariuszy* - wszystkie Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej.
- Prowadzone ćwiczenia i laboratoria: *Rachunek prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej, Probabilistyka dla aktuariuszy, Rachunek prawdopodobieństwa I, Rachunek prawdopodobieństwa II, Przetwarzanie i analiza danych w systemie SAS* - wszystkie Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej; *Probabilistyka* - Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej; *Matematyka 2* - Wydział Instalacji Budowlanych, Hydrotechniki i Inżynierii Środowiska PW; *Matematyka 1, Matematyka 2, Matematyka 3* - Wydział Geodezji i Kartografii PW.
- Przygotowanie skryptów do przedmiotów *Rachunek Prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej* oraz *Modele grafowe* w ramach Zadania 10 (Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych) projektu NERW 2 (Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca) Politechniki Warszawskiej.

### 7.3 Opieka naukowa nad studentami.

- Obronione 3 prace magisterskie oraz 2 prace licencjackie, Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej.

## 8 Literatura

- [H1] B. Kołodziejek, Logarithmic tails of sums of products of positive random variables bounded by one, *Ann. Appl. Probab.* 27(2) (2017), 1171–1189.
- [H2] B. Kołodziejek, On perpetuities with light tails, *Adv. Appl. Probab.*, 50(4) (2018), 1119–1154.
- [H3] E. Damek, B. Kołodziejek, A renewal theorem and supremum of a perturbed random walk, *Electron. Commun. Probab.* 23 (2018), 1–13.
- [H4] E. Damek, B. Kołodziejek, Stochastic recursions: Between Kesten’s and Grincevičius–Grey’s assumptions, *Stoch. Process. Their Appl.* 130(3) (2020), 1792–1819.
- [H5] K. Burdzy, B. Kołodziejek, T. Tadić, Inverse Exponential Decay: Stochastic Fixed Point Equation and ARMA Models, *Bernoulli* 25(4B) (2019), 3939–3977.
- [P1] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones through Gleason’s theorem. *Studia Math.* 217 (2013), no. 1, 1–17.
- [P2] B. Kołodziejek, Multiplicative Cauchy functional equation on symmetric cones. *Aequ. Math.* 89 (2015), no. 4, 1075–1094.
- [P3] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones without invariance of the "quotient". *J. Theor. Probab.* 29 (2016), no. 2, 550–568.
- [P4] B. Kołodziejek, Characterization of beta distribution on symmetric cones. *J. Multivariate Anal.* 143 (2016), 414–423.
- [P5] B. Kołodziejek, The generalized fundamental equation of information on symmetric cones. *Aequ. Math.* 90 (2016), no. 5, 917–933.
- [R1] B. Kołodziejek, The Matsumoto-Yor property and its converse on symmetric cones. *J. Theor. Probab.* 30 (2017), no. 2, 624–638.
- [R2] B. Kołodziejek, A Matsumoto-Yor characterization for Kummer and Wishart random matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018), no. 2, 976–986.
- [R3] B. Kołodziejek, A. Piliszek, Independence characterization for Wishart and Kummer random matrices, *REVSTAT-Stat. J.* 18(3) (2020), 357–373.
- [R4] H. Ishi, B. Kołodziejek, Characterization of the Riesz Exponential Family on homogeneous cones, *Colloq. Math.* 158(1) (2019), 45–57.
- [R5] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, Wishart laws and variance function on homogeneous cones, *Probab. Math. Stat.* 39(2) (2019), 337–360.
- [R6] M. Piccioni, B. Kołodziejek, G. Letac, Location and scale behaviour of the quantiles of a natural exponential family, *ESAIM-Prob. Stat.* 24 (2020), 244–251.
- [R7] B. Kołodziejek, The left tail of renewal measure. *Stat. Probab. Lett.* 129 (2017), 306–310.

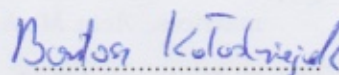
- [1] G. Alsmeyer and P. Dyszewski. Thin tails of fixed points of the nonhomogeneous smoothing transform. *Stochastic Process. Appl.*, 127(9):3014–3041, 2017.
- [2] G. Alsmeyer, A. Iksanov, and U. Rösler. On distributional properties of perpetuities. *J. Theoret. Probab.*, 22(3):666–682, 2009.
- [3] V. F. Araman and P. W. Glynn. Tail asymptotics for the maximum of perturbed random walk. *Ann. Appl. Probab.*, 16(3):1411–1431, 2006.
- [4] K. B. Athreya, D. McDonald, and P. Ney. Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains. *Ann. Probab.*, 6(5):788–797, 1978.
- [5] S. N. Bernstein. On a property which characterizes a gaussian distribution. *Proc. Leningrad Polytech. Inst.*, 217:21–22, 1941.
- [6] J. Bertoin and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.
- [7] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [8] D. Blackwell. Extension of a renewal theorem. *Pacific J. Math.*, 3:315–320, 1953.
- [9] K. Bobecka and J. Wesolowski. The Lukacs-Olkin-Rubin theorem without invariance of the “quotient”. *Studia Math.*, 152(2):147–160, 2002.
- [10] D. Buraczewski and E. Damek. A simple proof of heavy tail estimates for affine type Lipschitz recursions. *Stochastic Process. Appl.*, 127(2):657–668, 2017.
- [11] D. Buraczewski, E. Damek, Y. Guivarc’h, A. Hulanicki, and R. Urban. Tail-homogeneity of stationary measures for some multidimensional stochastic recursions. *Probab. Theory Related Fields*, 145(3-4):385–420, 2009.
- [12] D. Buraczewski, E. Damek, and T. Mikosch. *Stochastic models with power-law tails*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, [Cham], 2016. The equation  $X = AX + B$ .
- [13] D. Buraczewski, E. Damek, T. Mikosch, and J. Zienkiewicz. Large deviations for solutions to stochastic recurrence equations under Kesten’s condition. *Ann. Probab.*, 41(4):2755–2790, 2013.
- [14] D. Buraczewski, P. Dyszewski, A. Iksanov, and A. Marynych. On perpetuities with gamma-like tails. *J. Appl. Probab.*, 55(2):368–389, 2018.
- [15] K. Burdzy, R. Hołyst, and P. March. A Fleming-Viot particle representation of the Dirichlet Laplacian. *Comm. Math. Phys.*, 214(3):679–703, 2000.
- [16] K. Burdzy, B. Kołodziejek, and T. Tvrtko. Stochastic fixed-point equation and local dependence measure. *arXiv:2004.01850*, pages 1–31, 2020.

- [17] H. Carlsson. Remainder term estimates of the renewal function. *Ann. Probab.*, 11(1):143–157, 1983.
- [18] M. Casalis and G. Letac. The Lukacs-Olkin-Rubin characterization of Wishart distributions on symmetric cones. *Ann. Statist.*, 24(2):763–786, 1996.
- [19] E. Damek and P. Dyszewski. Iterated random functions and regularly varying tails. *J. Difference Equ. Appl.*, 24(9):1503–1520, 2018.
- [20] E. Damek and J. Zienkiewicz. Affine stochastic equation with triangular matrices. *J. Difference Equ. Appl.*, 24(4):520–542, 2018.
- [21] N. G. de Bruijn. The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 15:25–32, 1951.
- [22] P. Diaconis and D. Freedman. Iterated random functions. *SIAM Rev.*, 41(1):45–76, 1999.
- [23] P. Dyszewski. Iterated random functions and slowly varying tails. *Stochastic Process. Appl.*, 126(2):392–413, 2016.
- [24] P. Embrechts and C. M. Goldie. Perpetuities and random equations. In *Asymptotic statistics (Prague, 1993)*, Contrib. Statist., pages 75–86. Physica, Heidelberg, 1994.
- [25] J. Faraut and A. Korányi. *Analysis on symmetric cones*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.
- [26] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Ann. of Math. (2)*, 44:423–453, 1943.
- [27] C. M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Probab.*, 1(1):126–166, 1991.
- [28] C. M. Goldie and R. Grübel. Perpetuities with thin tails. *Adv. in Appl. Probab.*, 28(2):463–480, 1996.
- [29] C. M. Goldie and R. A. Maller. Stability of perpetuities. *Ann. Probab.*, 28(3):1195–1218, 2000.
- [30] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, and H. Massam. Model selection in the space of gaussian models invariant by symmetry. *arXiv:2004.03503*, pages 1–34, 2020.
- [31] D. R. Grey. Regular variation in the tail behaviour of solutions of random difference equations. *Ann. Appl. Probab.*, 4(1):169–183, 1994.
- [32] A. K. Grincevičius. One limit distribution for a random walk on lines. *Litovsk. Mat. Sb.*, 15(4):79–91, 243, 1975.
- [33] A. Hassairi and S. Lajmi. Classification of Riesz exponential families on a symmetric cone by invariance properties. *J. Theoret. Probab.*, 17(3):521–539, 2004.
- [34] L. V. Hedges and M. D. Perlman. Obituary: Ingram Olkin. *Bernoulli News*, 23(2):11–14, 2016.



- [35] P. Hitczenko. On tails of perpetuities. *J. Appl. Probab.*, 47(4):1191–1194, 2010.
- [36] P. Hitczenko and J. Wesolowski. Perpetuities with thin tails revisited. *Ann. Appl. Probab.*, 19(6):2080–2101, 2009.
- [37] A. Iksanov. *Renewal theory for perturbed random walks and similar processes*. Probability and its Applications. Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.
- [38] H. Ishi. Matrix realization of a homogeneous cone. In *Geometric science of information*, volume 9389 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 248–256. Springer, Cham, 2015.
- [39] A. Jakubowski and Z. S. Szewczak. Truncated moments of perpetuities and a new central limit theorem for GARCH processes without Kesten’s regularity. *Stochastic Process. Appl.*, 131:151–171, 2021.
- [40] M. Kac. On a characterization of the normal distribution. *Amer. J. Math.*, 61:726–728, 1939.
- [41] H. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.*, 131:207–248, 1973.
- [42] H. Kesten and R. A. Maller. Two renewal theorems for general random walks tending to infinity. *Probab. Theory Related Fields*, 106(1):1–38, 1996.
- [43] P. Kevei. A note on the Kesten-Grincevičius-Goldie theorem. *Electron. Commun. Probab.*, 21:Paper No. 51, 12, 2016.
- [44] P. Kevei. Implicit renewal theory in the arithmetic case. *J. Appl. Probab.*, 54(3):732–749, 2017.
- [45] A. E. Koudou and P. Vallois. Independence properties of the Matsumoto-Yor type. *Bernoulli*, 18(1):119–136, 2012.
- [46] G. Letac. A contraction principle for certain Markov chains and its applications. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 50 of *Contemp. Math.*, pages 263–273. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [47] G. Letac. A characterization of the Wishart exponential families by an invariance property. *J. Theoret. Probab.*, 2(1):71–86, 1989.
- [48] I. Olkin and H. Rubin. A characterization of the Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.*, 33:1272–1280, 1962.
- [49] Z. Palmowski and B. Zwart. Tail asymptotics of the supremum of a regenerative process. *J. Appl. Probab.*, 44(2):349–365, 2007.
- [50] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [51] V. Seshadri and J. Wesolowski. Constancy of regressions for beta distributions. *Sankhyā*, 65(2):284–291, 2003.

- [52] C. Stone. On moment generating functions and renewal theory. *Ann. Math. Statist.*, 36:1298–1301, 1965.
- [53] W. Vervaat. *Success epochs in Bernoulli trials (with applications in number theory)*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1972. Mathematical Centre Tracts, No. 42.
- [54] W. Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. *Adv. in Appl. Probab.*, 11(4):750–783, 1979.
- [55] K. Zimna. Thin tails of perpetuities. Master’s thesis, Fac. Math. Information Sci., Warsaw Univ. Technology, 2019. Supervisor: B. Kołodziejek.

  
 Bartosz Kołodziejek